

Ex 1 (valider une conjecture à l'aide d'une récurrence)

Avec la calculatrice, déterminer
Avec un tableur, on a obtenu ci-dessous les premières valeurs de u_n et $1 + u_n$.

- Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
- Valider cette conjecture par un raisonnement par récurrence.

Ex 2 (suite bornée, suite croissante)

u est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $0 < u_n < 3$.
 - Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n < u_{n+1}$.
- Que peut-on en déduire pour la suite u ?

Ex 3 :

u est la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $0 \leq u_n \leq 7$.
- Démontrer par récurrence que la suite u est croissante.

Ex 4

u est la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.
- Démontrer par récurrence que la suite u est décroissante.

Ex 5 : Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $2^n \geq n + 1$.

Ex 6 : Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$: $4^n \geq 4n + 1$.

Ex 7

u est la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3}$.

- Calculer u_1 et u_2 ; émettre une conjecture.
- Démontrer cette conjecture par récurrence.

Ex 8 (en géométrie)

On considère les triangles rectangles $OA_0A_1, OA_1A_2, \dots, OA_nA_{n+1}, \dots$ tels que $OA_0 = 1$;

$$A_0A_1 = A_1A_2 = \dots = 2$$

- Faire une figure (représenter les 3 premiers triangles).
- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $OA_n = \sqrt{4n + 1}$.

Ex 9

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ex 10

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ex 11

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $(1 + \pi)^n \geq 1 + n\pi$.

Ex 12

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$