

Term Spé Fiche d'exercices sur les suites (révisions)

Exercice 1 :

La suite (u_n) est définie par

$$\begin{cases} u_0 = 20 \\ u_{n+1} = u_n - (n-4)^2, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite.
2. Conjecturer le sens de variation.
3. Démontrer cette conjecture.

Exercice 2 :

Représenter dans un repère les cinq premiers termes des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1. $u_n = 4n - 7$
2. $u_n = n^2 + 1$
3. $u_{n+1} = 2u_n - 1$ avec $u_0 = 0$

Exercice 3 :

Les suites suivantes sont arithmétiques.

Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis calculer les cinq premiers termes.

1. $u_0 = 2$ et $r = 3$
2. $u_0 = 4$ et $r = -3$
3. $u_1 = 3$ et $r = \frac{1}{2}$
4. $u_1 = \frac{3}{4}$ et $r = \frac{1}{2}$

Exercice 4 :

Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1. $u_n = 7n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $u_n = n^2 + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 7, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + n + 9, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Exercice 5 :

Les suites suivantes sont arithmétiques de raison r . Exprimer u_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. $u_2 = 2$ et $r = 4$
2. $u_5 = 7$ et $r = -\frac{1}{2}$
3. $u_3 = 4$ et $r = 12$
4. $u_8 = \frac{37}{2}$ et $r = -\frac{1}{4}$

Exercice 6 :

On donne le premier terme et la raison q des suites géométriques suivantes.

Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n puis calculer les cinq premiers termes.

1. $v_0 = 3$ et $q = 4$
2. $v_0 = 2$ et $q = -3$
3. $v_1 = 5$ et $q = \frac{1}{2}$
4. $v_1 = -\frac{1}{4}$ et $q = 2$

Exercice 7 :

Déterminer si les suites suivantes sont géométriques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1. $v_n = 8n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_n = n^4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $v_n = 2 \times 3n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. $v_n = -5 \times 2^{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 3v_n + 3n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$
6. $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 5 + 7v_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Exercice 8 :

Chacune des suites suivantes est géométrique.

Exprimer v_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. $v_2 = 2$ et $q = -3$
2. $v_5 = -3$ et $q = 2$
3. $v_1 = -1$ et $q = \frac{1}{3}$
4. $v_{10} = \frac{1}{6}$ et $q = -1$

Exercice 9 :

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? géométriques ? Justifier.

1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n+5}{n+1}$.

2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{4^n}{3^{n+1}}$.

3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n^2 + 4n + 3}{n + 3}$.

4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 5n + 2^n$.

Exercice 10 :

Une médiathèque a ouvert début 2017 et 3 000 personnes se sont inscrites durant la première année. Chaque année, 75 % des inscrits renouvellent leur abonnement et 500 nouvelles adhésions ont lieu. On modélise la situation par la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n , où $a_0 = 3000$ est le nombre d'adhérents en 2017 et a_n le nombre d'inscrits l'année 2017 + n .

1. a. Calculer a_1 et a_2 .
- b. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $a_{n+1} = 0,75a_n + 500$.
2. On pose $b_n = a_n - 2000$ pour tout entier naturel n .
 - a. Prouver que la suite (b_n) est une suite géométrique en précisant sa raison et son premier terme.
 - b. En déduire l'expression du terme général de la suite (b_n) puis de la suite (a_n) .
 - c. Quel est le sens de variation de chaque suite ?
 - d. Conjecturer les limites des suites (a_n) et (b_n) . Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhésions de cette médiathèque ?

3. On propose l'algorithme suivant.

- a. Que permet de calculer cet algorithme ?
- b. Interpréter le résultat obtenu à la fin de cet algorithme.

```
n ← 0
A ← 3 000
Tant que (A > 2 100) :
    A ← 0,75 A + 500
    n ← n + 1
Fin tant que
```

Exercice 11 :

Perrine place 8 000 € sur un compte dont le taux d'intérêts cumulés est de 3,8 %. Chaque année, 76 € de frais de gestion sont prélevés.

Pour tout entier n , on note C_n le capital de l'année n . On suppose que l'année 0 est l'année du premier dépôt.

1. On cherche le capital dont disposera Perrine dans 10 ans.
 - a. Établir une relation de récurrence pour définir la suite C_n .
 - b. Soit D_n la suite définie pour tout entier n par $D_n = C_n - 2000$. Prouver que cette suite est géométrique et donner sa raison et son premier terme.
 - c. En déduire une expression de C_n en fonction de n et répondre au problème posé.
2. Combien d'années seront nécessaires pour que le capital augmente de 50 % ?



Exercice 12 :

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 , v_1 , u_2 et v_2 .
2. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = v_n - u_n$.
 - a. Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique dont on donnera sa raison et son premier terme.
 - b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n .
3. On considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par $s_n = u_n + v_n$.
 - a. Calculer s_0 , s_1 et s_2 . Que peut-on conjecturer ?
 - b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n$. Qu'en déduit-on ?
4. En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n .
5. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$:
 - a. $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 - b. $W_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

Exercice 13 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 5$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$.

1. a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$.
- b. Résoudre $x^2 - 6x + 8 = 0$.
2. Soient α et β deux nombres réels. On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par $v_n = u_{n+1} - \alpha u_n$ et $w_n = u_{n+1} - \beta u_n$. Déterminer la valeur des réels α et β pour que les suites (v_n) et (w_n) soient géométriques.
3. Déterminer $v_n - w_n$ en fonction de u_n pour tout entier naturel n .
4. En déduire une expression de v_n , w_n et u_n en fonction de n .

Comment ruiner un roi et tous ses successeurs :

Dans l'antiquité, le roi des Indes demanda un nouveau jeu pour se distraire.

Son vizir Sissa inventa le jeu d'échecs.

Le roi, ravi de ce nouvel amusement lui demanda comment le récompenser.

Sissa dit : « Je voudrais un peu de riz. Placez un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième et ainsi de suite en doublant à chaque fois le nombre de grains de riz. »

Le roi accepta cette demande, qu'il trouva bien modeste.

Le conseiller s'écria : « Sire ! Vous conduisez notre pays à la ruine ! »

Pourquoi le conseiller du roi réagit ainsi ?

Corrigé

Ex 1: $u_0 = 20$ $u_{n+1} = u_n - (n-4)^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1) $u_0 = 20$

$$u_1 = u_0 - (0-4)^2 = 20 - 16 = 4$$

$$u_2 = u_1 - (1-4)^2 = 4 - 9 = -5$$

$$u_3 = u_2 - (2-4)^2 = -5 - 4 = -9$$

2) La suite (u_n) semble décroissante.

3) $u_{n+1} - u_n = -(n-4)^2$ $(n-4)^2 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc (u_n) est décroissante.

Ex 2: Voir fin du corrigé

Ex 3:

1) $u_n = u_0 + n \times r$

$$u_n = 2 + 3n$$

$$+3 \left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 + 3 \times 0 = 2 \\ u_1 = 2 + 3 \times 1 = 5 \\ u_2 = 2 + 3 \times 2 = 8 \\ u_3 = 2 + 3 \times 3 = 11 \\ u_4 = 2 + 3 \times 4 = 14 \end{array} \right.$$

2) $u_n = u_0 + n \times r$

$$u_n = 4 - 3n$$

$$-3 \left\{ \begin{array}{l} u_0 = 4 - 3 \times 0 = 4 \\ u_1 = 4 - 3 \times 1 = 1 \\ u_2 = 4 - 3 \times 2 = -2 \\ u_3 = 4 - 3 \times 3 = -5 \\ u_4 = 4 - 3 \times 4 = -8 \end{array} \right.$$

3) $u_n = u_0 + n \times r$

$$u_n = 3 + \frac{1}{2}n$$

$$+\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} u_0 = 3 + \frac{1}{2} \times 0 = 3 \\ u_1 = 3 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{7}{2} \\ u_2 = 3 + \frac{1}{2} \times 2 = 4 \\ u_3 = 3 + \frac{1}{2} \times 3 = \frac{9}{2} \\ u_4 = 3 + \frac{1}{2} \times 4 = 5 \end{array} \right.$$

4) $u_n = u_1 + (n-1) \times r$

$$u_n = \frac{3}{4} + (n-1) \times \frac{1}{2}$$

$$u_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n$$

$$u_0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{4}$$

$$u_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$u_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$u_3 = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$$

$$u_4 = \frac{7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

Ex 4:

1) $u_n = 7n - 3$ $u_{n+1} = 7(n+1) - 3 = 7n + 4$

$$u_{n+1} - u_n = 7n + 4 - (7n - 3) = 7$$

donc (u_n) est arithmétique de raison $r = 7$ et de premier terme $u_0 = -3$.

3) $u_0 = 1$ $u_{n+1} = 2u_n + 7$

$$u_1 = 2 \times 1 + 7 = 9 \quad u_2 = 2 \times 9 + 7 = 25$$

$$u_1 - u_0 = 8; \quad u_2 - u_1 = 16$$

donc (u_n) n'est pas arithmétique

2) $u_n = n^2 + 4$ $u_{n+1} = (n+1)^2 + 4 = n^2 + 2n + 5$

$$u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 5 - (n^2 + 4) = 2n + 1$$

L'expression obtenue dépend de n
donc (u_n) n'est pas arithmétique.

4) $u_1 = -3$ $u_{n+1} = u_n + n + 9$

$$u_2 = -3 + 1 + 9 = 7; \quad u_3 = 7 + 2 + 9 = 18$$

$$u_2 - u_1 = 10; \quad u_3 - u_2 = 11$$

donc (u_n) n'est pas arithmétique.

Ex 5 :

$$1) u_n = u_2 + (n-2) \times r$$

$$u_n = 2 + (n-2) \times 4$$

$$u_n = 4n - 6$$

$$2) u_n = u_5 + (n-5) \times r$$

$$u_n = 7 + (n-5) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$u_n = -\frac{1}{2}n + \frac{19}{2}$$

$$3) u_n = u_3 + (n-3) \times r$$

$$u_n = 4 + (n-3) \times 12$$

$$u_n = 12n - 32$$

$$4) u_n = u_8 + (n-8) \times r$$

$$u_n = \frac{37}{2} + (n-8) \times \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$u_n = -\frac{1}{4}n + \frac{41}{2}$$

Ex 6 :

$$1) v_0 = 3 \quad q = 4$$

$$v_{n+1} = v_n \times q = 4 \times v_n$$

$$v_0 = 3$$

$$v_1 = 4 \times 3 = 12$$

$$v_2 = 4 \times 12 = 48$$

$$v_3 = 4 \times 48 = 192$$

$$v_4 = 4 \times 192 = 768$$

$$2) v_0 = 2 \quad q = -3$$

$$v_{n+1} = v_n \times q = -3v_n$$

$$v_0 = 2$$

$$v_1 = -3 \times 2 = -6$$

$$v_2 = -3 \times (-6) = 18$$

$$v_3 = -3 \times 18 = -54$$

$$v_4 = -3 \times (-54) = 162$$

$$3) v_1 = 5 \quad q = \frac{1}{2}$$

$$v_{n+1} = v_n \times q = \frac{1}{2} v_n$$

$$v_1 = 5$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$$

$$v_3 = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$$

$$v_4 = \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{8}$$

$$v_5 = \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{16}$$

$$4) v_1 = -\frac{1}{4} \quad q = 2$$

$$v_{n+1} = v_n \times q = 2v_n$$

$$v_1 = -\frac{1}{4}$$

$$v_2 = 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$v_3 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$v_4 = 2 \times (-1) = -2$$

$$v_5 = 2 \times (-2) = -4$$

Ex 7 :

$$1) v_n = 8n$$

$$v_{n+1} = 8(n+1) = 8n + 8 = v_n + 8$$

donc la suite (v_n) est arithmétique et non géométrique.

$$3) v_n = 2 \times 3n$$

$$v_0 = 2 \times 0 = 0 \quad v_1 = 2 \times 3 = 6 \quad v_2 = 2 \times 6 = 12$$

$$v_3 = 2 \times 9 = 18$$

$$\frac{v_2}{v_1} = 2 ; \frac{v_3}{v_2} = \frac{18}{12} = 1,5 \text{ donc } (v_n) \text{ n'est pas géométrique}$$

$$2) v_n = n^4$$

$$v_0 = 0^4 = 0 \quad \frac{v_1}{v_0} \text{ n'existe pas}$$

$$v_1 = 1^4 = 1 \quad \frac{v_2}{v_1} = 16$$

$$v_2 = 2^4 = 16 \quad \frac{v_3}{v_2} = 5,0625$$

$$v_3 = 3^4 = 81$$

donc (v_n) n'est pas géométrique

$$4) v_n = -5 \times 2^{n+1}$$

$$v_{n+1} = -5 \times 2^{n+1+1} = -5 \times 2^{n+1} \times 2$$

$$= v_n \times 2$$

donc (v_n) est géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $v_0 = -5 \times 2 = -10$.

$$5) V_0 = 1 \quad V_{n+1} = 3V_n + 3n$$

$$V_1 = 3V_0 + 3 \times 0 = 3$$

$$V_2 = 3V_1 + 3 \times 1 = 12$$

$$(V_3 = 3V_2 + 3 \times 2 = 42)$$

$$\frac{V_1}{V_0} = 3; \quad \frac{V_2}{V_1} = 4$$

donc (V_n) n'est pas géométrique

$$6) V_0 = 2 \quad V_{n+1} = 5 + 7V_n$$

$$V_1 = 5 + 7V_0 = 19$$

$$V_2 = 5 + 7V_1 = 138$$

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{19}{2} = 9,5; \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{138}{19} \approx 7,3$$

donc (V_n) n'est pas géométrique

Ex 8 :

$$1) V_2 = 2 \quad q = -3$$

$$V_n = V_2 \times q^{n-2}$$

$$V_n = 2 \times (-3)^{n-2}$$

$$2) V_5 = -3 \quad q = 2$$

$$V_n = V_5 \times q^{n-5}$$

$$V_n = (-3) \times 2^{n-5}$$

$$3) V_1 = -1 \quad q = \frac{1}{3}$$

$$V_n = V_1 \times q^{n-1}$$

$$V_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$4) V_{10} = \frac{1}{6} \quad q = -1$$

$$V_n = V_{10} \times q^{n-10}$$

$$V_n = \frac{1}{6} \times (-1)^{n-10}$$

Ex 9 :

$$1) u_n = \frac{n+5}{n+1}$$

$$u_0 = 5; \quad u_1 = 3; \quad u_2 = \frac{7}{2}$$

$$u_1 - u_0 = -2; \quad u_2 - u_1 = \frac{1}{2} \quad \text{donc } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique}$$

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{3}{5} = 0,6; \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{7}{6} \neq 0,6 \quad \text{donc } (u_n) \text{ n'est pas géométrique}$$

$$2) V_n = \frac{4^n}{3^{n+1}}$$

$$V_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{3^{n+2}} = \frac{4^n \times 4}{3^{n+1} \times 3} = \frac{4}{3} \times V_n \quad \text{donc } (V_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{4}{3} \text{ et de premier terme } V_0 = \frac{4}{3^1} = \frac{4}{3}$$

$$3) u_n = \frac{n^2 + 4n + 3}{n+3}$$

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + 4(n+1) + 3}{n+4} = \frac{n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 + 3}{n+4} = \frac{n^2 + 6n + 8}{n+4}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n^2 + 6n + 8}{n+4} - \frac{n^2 + 4n + 3}{n+3} \\ &= \frac{(n^2 + 6n + 8)(n+3) - (n^2 + 4n + 3)(n+4)}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 6n^2 + 18n + 8n + 24 - n^3 - 4n^2 - 4n^2 - 16n - 3n - 12}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{n^2 + 7n + 12}{n^2 + 3n + 4n + 12} \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc (u_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $u_0 = \frac{3}{3} = 1$

$$4) V_n = S_n + 2^n$$

$$V_0 = 1; V_1 = 7; V_2 = 14$$

$$V_1 - V_0 = 6; V_2 - V_1 = 7 \text{ donc } (V_n) \text{ n'est pas arithmétique.}$$

$$\frac{V_1}{V_0} = 7; \frac{V_2}{V_1} = 2 \text{ donc } (V_n) \text{ n'est pas géométrique}$$

Ex 10:

$$1) a) a_1 = \frac{75}{100} \times a_0 + 500 = \frac{75}{100} \times 3000 + 500 = 2750$$

$$a_2 = \frac{75}{100} \times a_1 + 500 = \frac{75}{100} \times 2750 + 500 \approx 2563 \left(\frac{5125}{2} \right)$$

$$b) a_{n+1} = \underbrace{0,75}_{\substack{\text{les inscrits} \\ \text{qui renouvellent} \\ \text{l'abonnement}}} a_n + \underbrace{500}_{\text{les nouveaux abonnés.}}$$

$$2) b_n = a_n - 2000 \Leftrightarrow a_n = b_n + 2000$$

$$\begin{aligned} a) b_{n+1} &= a_{n+1} - 2000 \\ &= 0,75a_n + 500 - 2000 \\ &= 0,75(b_n + 2000) - 1500 \\ &= 0,75b_n + 1500 - 1500 \\ &= 0,75b_n \end{aligned}$$

donc (b_n) est géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $b_0 = a_0 - 2000 = 1000$.

$$b) b_n = b_0 \times q^n = 1000 \times 0,75^n$$

$$a_n = b_n + 2000 = 1000 \times 0,75^n + 2000$$

c) (b_n) est une suite géométrique de premier terme positif et de raison comprise strictement entre 0 et 1 donc (b_n) est décroissante.

$a_n = b_n + 2000$ donc (a_n) a les mêmes variations que (b_n) donc (a_n) est décroissante.

3) a) Cet algorithme permet de calculer le nombre d'années après 2017 nécessaires pour que le nombre d'adhérents soit inférieur ou égal à 2100. C'est la valeur de n à la fin. A représente le nombre d'adhérents chaque année depuis 2017.

Ex 11:

1) a) $C_{n+1} = \left(1 + \frac{3,8}{100}\right) \times C_n - 76$ Augmenter de 3,8% c'est multiplier
par $CM = 1 + \frac{3,8}{100}$
 $C_{n+1} = 1,038 C_n - 76$

b) $D_n = C_n - 2000 \Leftrightarrow C_n = D_n + 2000$

$$D_{n+1} = C_{n+1} - 2000$$

$$= 1,038 C_n - 76 - 2000$$

$$= 1,038 (D_n + 2000) - 2076$$

$$= 1,038 D_n + 2076 - 2076$$

$$= 1,038 D_n$$

(D_n) est géométrique de raison $q = 1,038$ et de premier terme $D_0 = C_0 - 2000 = 6000$.

c) $D_n = D_0 \times q^n = 6000 \times 1,038^n$

$$C_n = D_n + 2000 = 6000 \times 1,038^n + 2000. \quad C_{10} = 10712$$

Dans 10 ans Perrine aura 10712€.

2) Grâce à la calculatrice, on a: $C_{13} = 11744$ et $C_{14} = 12114$

$$8000 \times \left(1 + \frac{50}{100}\right) = 12000$$

C'est donc la 14^e année après 2017 donc en 2031 que le capital de Perrine aura augmenté de 50%.

Ex 12:

1) $u_1 = \frac{3u_0 + 2v_0}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5}$

$$v_1 = \frac{2u_0 + 3v_0}{5} = \frac{2+6}{5} = \frac{8}{5}$$

$$u_2 = \frac{3u_1 + 2v_1}{5} = \frac{\frac{21}{5} + \frac{16}{5}}{5} = \frac{37}{25}$$

$$v_2 = \frac{2u_1 + 3v_1}{5} = \frac{\frac{14}{5} + \frac{24}{5}}{5} = \frac{38}{25}$$

2) $d_n = v_n - u_n$

a) $d_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} - \frac{3u_n + 2v_n}{5} = \frac{v_n - u_n}{5} = \frac{1}{5} d_n$

donc (d_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $d_0 = v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1$.

b) $d_n = d_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{5^n}$

3) $s_n = u_n + v_n$

a) $s_0 = u_0 + v_0 = 1 + 2 = 3$, $s_1 = u_1 + v_1 = \frac{7}{5} + \frac{8}{5} = \frac{15}{5} = 3$, $s_2 = u_2 + v_2 = \frac{37}{25} + \frac{38}{25} = \frac{75}{25} = 3$

b) $s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} + \frac{2u_n + 3v_n}{5} = \frac{5u_n + 5v_n}{5} = u_n + v_n = s_n$

la suite (s_n) est donc constante.

$$s_0 = u_0 + v_0 = 1 + 2 = 3 \quad \text{donc } s_n = 3 \text{ pour tout entier naturel } n.$$

$$4) S_n = 3 \text{ donc } u_n + v_n = 3 \quad (1)$$

$$d_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \text{ donc } -u_n + v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad (2)$$

$$(1) + (2) : 2v_n = 3 + \left(\frac{1}{5}\right)^n \Leftrightarrow v_n = \frac{3 + \left(\frac{1}{5}\right)^n}{2}$$

$$(1) - (2) : 2u_n = 3 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \Leftrightarrow u_n = \frac{3 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{2}$$

$$5) a) T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$= 1 + \frac{7}{5} + \dots + \frac{3 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{2}$$

$$= \frac{3 - \left(\frac{1}{5}\right)^0}{2} + \frac{3 - \left(\frac{1}{5}\right)^1}{2} + \dots + \frac{3 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \times (n+1) - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{5}\right)^0 + \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{5}\right)^n \right)$$

somme d'une suite géométrique
de raison $\frac{1}{5}$ et de 1^{er} terme $\left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1$.

$$= \frac{3}{2} \times (n+1) - \frac{1}{2} \left(1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} \right)$$

$$= \frac{3}{2}n + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right) \times \frac{5}{4}$$

$$= \frac{3}{2}n + \frac{3}{2} - \frac{5}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right)$$

$$T_n = \frac{3}{2}n + \frac{5}{8} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{7}{8}$$

$$b) W_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$= \frac{3 + \left(\frac{1}{5}\right)^0}{2} + \frac{3 + \left(\frac{1}{5}\right)^1}{2} + \dots + \frac{3 + \left(\frac{1}{5}\right)^n}{2}$$

$$= \frac{3}{2}n + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right) \times \frac{5}{4}$$

$$W_n = \frac{3}{2}n + \frac{5}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right) + \frac{17}{8}$$

Ex 13 :

$$1) a) (x-2)(x-4) = x^2 - 4x - 2x + 8 = x^2 - 6x + 8$$

$$b) x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \text{ ou } x-4=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=4$$

$$S = \{2; 4\}$$

$$2) V_n = u_{n+1} - \alpha u_n \Leftrightarrow u_{n+1} = v_n + \alpha u_n$$

$$V_{n+1} = u_{n+2} - \alpha u_{n+1}$$

$$= 6u_{n+1} - 8u_n - \alpha u_{n+1}$$

$$= (6-\alpha)u_{n+1} - 8u_n$$

$$= (6-\alpha)(v_n + \alpha u_n) - 8u_n$$

$$V_{n+1} = (6-\alpha)v_n + (6\alpha - \alpha^2 - 8)u_n$$

$$(v_n) \text{ géométrique } \Leftrightarrow -\alpha^2 + 6\alpha - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 8 = 0$$

$$\text{La raison est } q = 6-2=4 \text{ ou } 6-4=2 \text{ ou } \alpha=2 \text{ ou } \alpha=4$$

$$w_n = u_{n+1} - \beta u_n \Leftrightarrow u_{n+1} = w_n + \beta u_n$$

$$w_{n+1} = u_{n+2} - \beta u_{n+1}$$

$$= 6u_{n+1} - 8u_n - \beta u_{n+1}$$

$$= (6 - \beta)(w_n + \beta u_n) - 8u_n$$

$$= (6 - \beta)w_n + (6\beta - \beta^2 - 8)u_n$$

$$(w_n) \text{ géométrique si } 6\beta - \beta^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 6\beta + 8 = 0$$

$$\text{Alors la raison est } q = 6 - 2 = 4 \text{ ou } q = 6 - 4 = 2. \Leftrightarrow \beta = 2 \text{ ou } \beta = 4$$

$$3) v_n - w_n = u_{n+1} - \alpha u_n - u_{n+1} + \beta u_n$$

$$= (\beta - \alpha)u_n$$

$$= \begin{cases} \alpha - 2u_n \\ 2u_n \end{cases}$$

$$\text{si } \alpha = 2 \text{ alors } \beta = 4 \quad \beta - \alpha = 2$$

$$\text{si } \alpha = 4 \text{ alors } \beta = 2 \quad \beta - \alpha = -2$$

4) ~~On~~ On peut poser $\alpha = 2$ et $\beta = 4$ (car supposer $\alpha = 4$ et $\beta = 2$ ne fait que changer le rôle de v_n et w_n)

$$\text{Alors } v_n - w_n = 2u_n$$

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$ et de premier terme $v_0 = u_1 - 2u_0 = 5 - 2 = 3$.

(w_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $w_0 = u_1 - 4u_0 = 5 - 4 = 1$.

$$v_n = v_0 \times q^n = 3 \times 4^n$$

$$w_n = w_0 \times q^n = 1 \times 2^n$$

$$u_n = \frac{v_n - w_n}{2} = \frac{3 \times 4^n - 2^n}{2}$$

$$= 3 \times \frac{2^{2n}}{2} - \frac{2^n}{2}$$

$$u_n = 3 \times 2^{2n-1} - 2^{n-1}$$

Histoire de l'échiquier :

Nombre de grains de riz : $1^{\text{er}} \text{ case } 2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad \dots \quad 2^{63}$

$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{63}$$

$$= 1 \times \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2}$$

$$= (-1) \times (1 - 2^{64})$$

$$S = 2^{64} - 1$$

1 grain de riz pèse $0,28 \text{ g} = 2,8 \times 10^{-4} \text{ kg}$

$$(2^{64} - 1) \times 2,8 \times 10^{-4} = 5,165 \times 10^{15} \text{ kg} = 5,165 \times 10^{12} \text{ tonnes}$$

La production annuelle mondiale en 2023 de riz est de 523,5 millions de tonnes soit $5,235 \times 10^8$ tonnes.

La demande du vizir représente $9,87 \times 10^{19}$ fois la production mondiale !!

Exercice 2 :

1) $u_n = 4n - 7 = f(n)$ avec $f(x) = 4x - 7$ une fonction affine représentée par la droite d'équation $y = 4x - 7$.

Les points de coordonnées $(n ; u_n)$ sont donc alignés.

$u_0 = 4 \times 0 - 7 = -7$ donc on aura le point A(0 ; - 7).

$u_1 = 4 \times 1 - 7 = -3$ donc on aura le point B(1 ; - 3).

$u_2 = 4 \times 2 - 7 = 1$ donc on aura le point C(2 ; 1).

$u_3 = 4 \times 3 - 7 = 5$ donc on aura le point D(3 ; 5).

$u_4 = 4 \times 4 - 7 = 9$ donc on aura le point E(4 ; 9).

2) $u_n = n^2 + 1 = f(n)$ avec $f(x) = x^2 + 1$ fonction trinôme représentée par une parabole tournée vers le haut
(car $a = 1$ positif) et de sommet (0 ; 1).

Les points de la suite sont donc sur cette parabole.

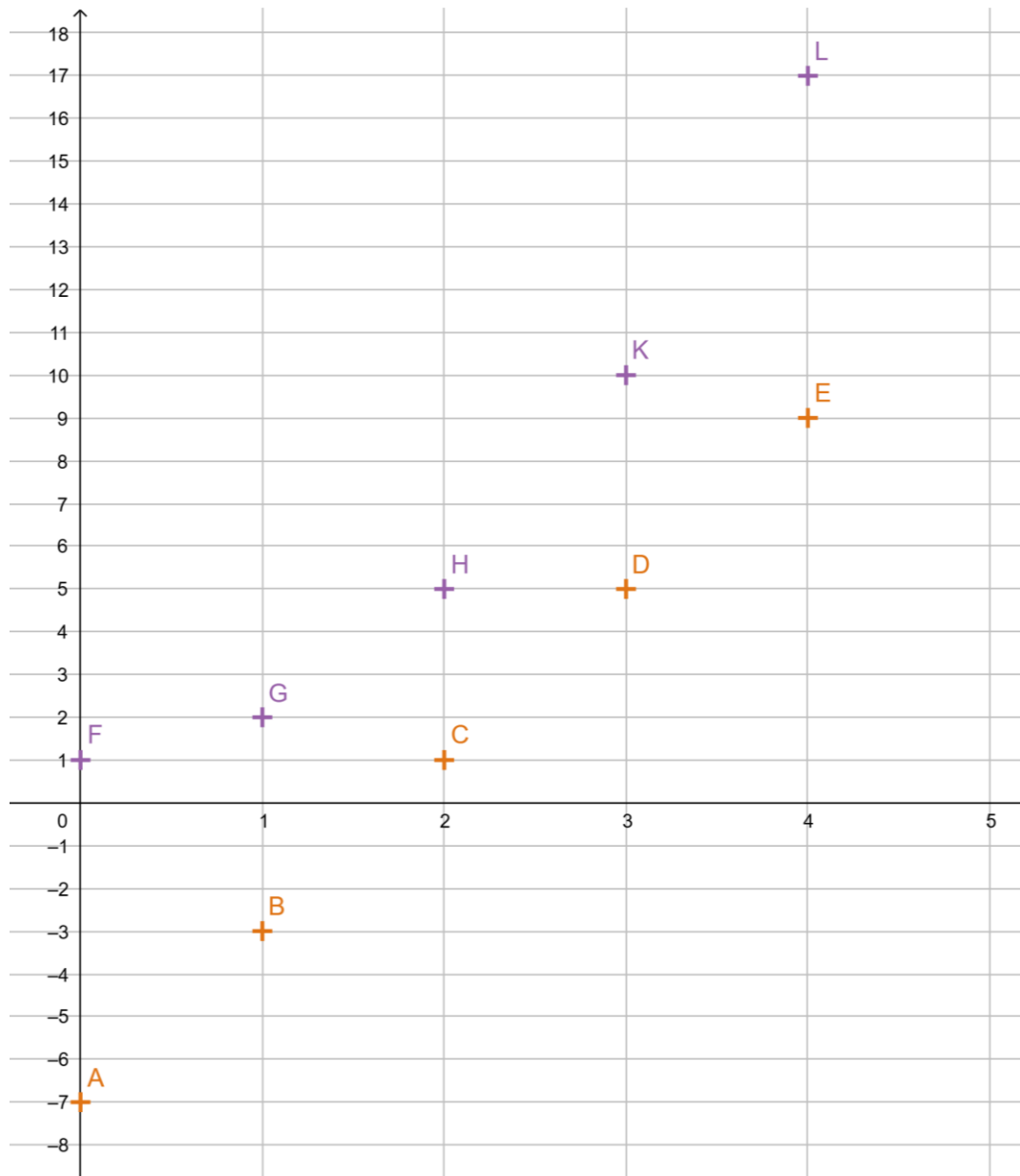
$u_0 = 0^2 + 1 = 1$ donc on aura le point F(0 ; 1).

$u_1 = 1^2 + 1 = 2$ donc on aura le point G(1 ; 2).

$u_2 = 2^2 + 1 = 5$ donc on aura le point H(2 ; 5).

$u_3 = 3^2 + 1 = 10$ donc on aura le point K(3 ; 10).

$u_4 = 4^2 + 1 = 17$ donc on aura le point L(4 ; 17).



3) $u_{n+1} = 2u_n - 1 = f(u_n)$ avec $f(x) = 2x - 1$ fonction affine représentée par la droite d'équation $y = 2x - 1$.

La représentation graphique utilisée sera celle de l'escargot.

On trace la droite représentative de f , en rouge et la droite d'équation $y = x$ en bleue.

On place $u_0 = 0$ sur l'axe des abscisses.

On applique ensuite la construction revue en cours et on obtient les valeurs successives de u_n sur l'axe des abscisses.

