

TSpé DEVOIR SURVEILLE N°2 (2h)**/40****Les élèves disposant d'un tiers-temps ne traiteront pas les questions précédées d'un @****Exercice 1: QCM**

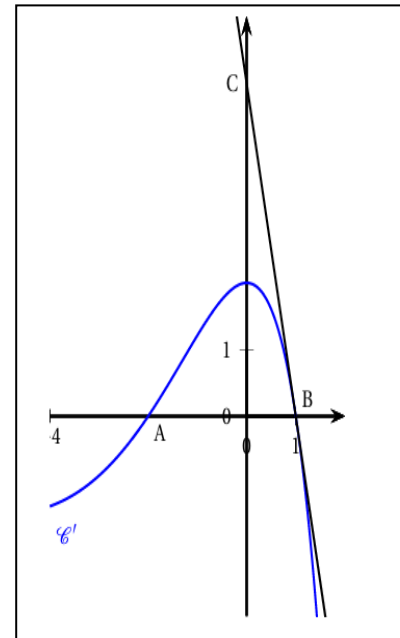
(6 points)

Pour chaque question une seule réponse est exacte. On ne demande pas de justification.

Entourer la bonne réponse sur le sujet.

- A) On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-4 ; 2]$.
 On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f .
 On donne ci-contre la représentation graphique C' de la fonction f'
 dans un repère du plan.
 On a les points $A(-2 ; 0)$; $B(1 ; 0)$ et $C(0 ; 5)$.

- 1) La fonction f est :
 a. concave sur $[-2 ; 1]$ b. convexe sur $[-4 ; 0]$
 c. convexe sur $[-2 ; 1]$ d. convexe sur $[0 ; 2]$
- 2) On admet que la droite (BC) est la tangente à la courbe C'
 au point B . On a :
 a. $f'(1) < 0$ b. $f'(1) = 5$
 c. $f''(1) > 0$ d. $f''(1) = -5$



- @ B) On considère les suites (a_n) et (b_n) définie par $a_0 = 1$
 et pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,5 a_n + 1$ et $b_n = a_n - 2$.
 a. (a_n) est arithmétique de raison 1 b. (b_n) est arithmétique de raison -2
 c. (a_n) est géométrique de raison 0,5 d. (b_n) est géométrique de raison 0,5

- C) Pour tout réel x , l'expression $2 + \frac{3e^{-x} - 5}{e^{-x} + 1}$ est égale à :

- a. $\frac{5 - 3e^x}{1 + e^x}$ b. $\frac{5 + 3e^x}{1 + e^x}$ c. $\frac{5 + 3e^x}{1 - e^x}$ d. $\frac{5 - 3e^x}{1 - e^x}$

- @ D) On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_{n+1} = 2 w_n - 4$ et $w_2 = 8$.

On peut affirmer que :

- a. $w_0 = 0$ b. $w_0 = 10$ c. $w_0 = 5$ d. w_0 ne peut pas être calculé

- @ E) La quantité $3^n + 2 \times 3^n$ est égale à :

- a. $3^n (3^n + 2)$ b. $3^n + 5^n$ c. 3^{n+1} d. $3^n + 6^n$

Exercice 2:

(5 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n , $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 3 \times 2^n + 4$.

Exercice 3:

(7 points)

Le 1^{er} janvier 2020, il y a 200 poissons dans un aquarium.

Chaque année, 15% des poissons meurent, et on ajoute 45 nouveaux poissons en fin d'année.

On note u_n le nombre de poissons dans l'aquarium de 1^{er} janvier 2020 + n .

1. Déterminer le nombre de poissons dans l'aquarium en 2021
 2. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,85u_n + 45$
 3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 300$
 - a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
 - b) Exprimer v_n en fonction de n
 - c) En déduire que $u_n = -100 \times 0,85^n + 300$
- @ d) Donner le sens de variation de (v_n) . En déduire celui de (u_n) . Justifier.

Exercice 4:

(14 points)

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 1 [$ par $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

On admet que f est dérivable sur $] -\infty ; 1 [$ et on appelle C_f sa courbe représentative dans un repère.

- 1) a) Montrer que $f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $] -\infty ; 1 [$.
b) Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de f sur $] -\infty ; 1 [$.
- 2) a) Démontrer que $f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3}$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $] -\infty ; 1 [$.
b) Etudier la convexité de f sur $] -\infty ; 1 [$.
c) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
d) En déduire que, sur $] -\infty ; 1 [$, $e^x \geq (-2x - 1)(x - 1)$

Exercice 5 :

(8 points)

Partie A : Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = 2x e^{-x}$.

- 1) a) Démontrer que, pour tout réel x dans $[0 ; 1]$, $f'(x) = 2(1-x)e^{-x}$
b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; 1]$.

Partie B : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0,1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1) Démontrer par récurrence que $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$ pour tout entier naturel n .
- 2) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

@Exercice 6 : BONUS

(4 points)

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5$ et $u_0 = 5$.

- 1) Démontrer par récurrence que $u_n < u_{n+1}$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5.
- 2) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Exercice 1: QCM

(6 points)

Pour chaque question une seule réponse est exacte. On ne demande pas de justification.

Entourer la bonne réponse sur le sujet.

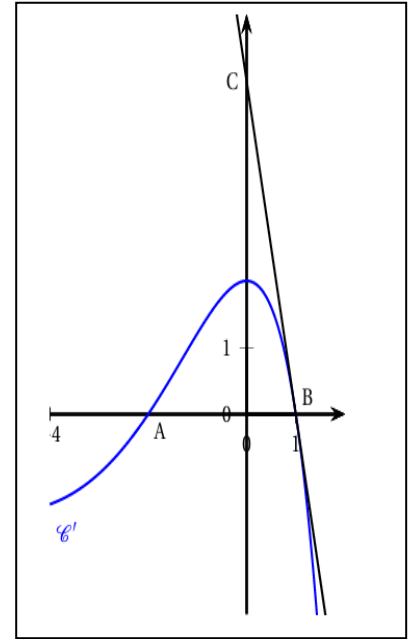
- A) On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-4 ; 2]$.
On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f .
On donne ci-contre la représentation graphique C' de la fonction f' dans un repère du plan.
On a les points $A(-2 ; 0)$; $B(1 ; 0)$ et $C(0 ; 5)$.

- 1) La fonction f est :
- | | |
|---------------------------|---|
| a. concave sur $[-2 ; 1]$ | b. convexe sur $[-4 ; 0]$ |
| c. convexe sur $[-2 ; 1]$ | d. convexe sur $[0 ; 2]$ |

f sera convexe sur un intervalle si la fonction f' est croissante sur cet intervalle ($f'' > 0$)

- 2) On admet que la droite (BC) est la tangente à la courbe C' au point B. On a :
- | | |
|-----------------|------------------------------------|
| a. $f'(1) < 0$ | b. $f'(1) = 5$ |
| c. $f''(1) > 0$ | d. $f''(1) = -5$ |

**Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f' est $f''(1)$.
Ce coefficient directeur est négatif (pente descendante)**



- @ B) On considère les suites (a_n) et (b_n) définie par $a_0 = 1$
et pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,5 a_n + 1$ et $b_n = a_n - 2$.
- | | |
|--|--|
| a. (a_n) est arithmétique de raison 1 | b. (b_n) est arithmétique de raison -2 |
| c. (a_n) est géométrique de raison 0,5 | d. (b_n) est géométrique de raison 0,5 |

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 0,5 a_n + 1 - 2 = 0,5 a_n - 1 = 0,5 (a_n - 2) = 0,5 b_n$$

- C) Pour tout réel x , l'expression $2 + \frac{3e^{-x} - 5}{e^{-x} + 1}$ est égale à :

- | | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| a. $\frac{5 - 3e^x}{1 + e^x}$ | b. $\frac{5 + 3e^x}{1 + e^x}$ | c. $\frac{5 + 3e^x}{1 - e^x}$ | d. $\frac{5 - 3e^x}{1 - e^x}$ |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|

$$2 + \frac{3e^{-x} - 5}{e^{-x} + 1} = \frac{2e^{-x} + 2}{e^{-x} + 1} + \frac{3e^{-x} - 5}{e^{-x} + 1} = \frac{5e^{-x} - 3}{e^{-x} + 1} = \frac{(5e^{-x} - 3)e^x}{(e^{-x} + 1)e^x} = \frac{5 - 3e^x}{1 + e^x}$$

- @ D) On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_{n+1} = 2 w_n - 4$ et $w_2 = 8$.
On peut affirmer que :

- | | | | |
|--------------|---------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| a. $w_0 = 0$ | b. $w_0 = 10$ | c. $w_0 = 5$ | d. w_0 ne peut pas être calculé |
|--------------|---------------|--------------------------------|-----------------------------------|

$$2w_n = w_{n+1} + 4 \text{ donc } w_n = \frac{w_{n+1} + 4}{2} ; w_1 = \frac{w_2 + 4}{2} = \frac{8 + 4}{2} = 6 \text{ et } w_0 = \frac{w_1 + 4}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5$$

- @ E) La quantité $3^n + 2 \times 3^n$ est égale à :

- | | | | |
|--------------------|----------------|--------------------------------|----------------|
| a. $3^n (3^n + 2)$ | b. $3^n + 5^n$ | c. 3^{n+1} | d. $3^n + 6^n$ |
|--------------------|----------------|--------------------------------|----------------|

$$3^n + 2 \times 3^n = 3^n (1 + 2) = 3^n \times 3 = 3^{n+1}$$

Exercice 2:

(5 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n , $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 3 \times 2^n + 4$.

Posons P_n : " $u_n = 3 \times 2^n + 4$ " pour tout n entier naturel.

Initialisation : $n = 0$ $u_0 = 7$ et $3 \times 2^0 + 4 = 3 + 4 = 7$ donc $u_0 = 3 \times 2^0 + 4$ donc P_0 est vérifiée.

Hérédité : Soit un entier k tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $u_k = 3 \times 2^k + 4$

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $u_{k+1} = 3 \times 2^{k+1} + 4$

$$u_{k+1} = 2u_k - 4 = 2(3 \times 2^k + 4) - 4 = 3 \times 2^{k+1} + 8 - 4 = 3 \times 2^{k+1} + 4$$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n .

Exercice 3:

(7 points)

Le 1^{er} janvier 2020, il y a 200 poissons dans un aquarium.

Chaque année, 15% des poissons meurent, et on ajoute 45 nouveaux poissons en fin d'année.

On note u_n le nombre de poissons dans l'aquarium de 1^{er} janvier 2020 + n .

- Déterminer le nombre de poissons dans l'aquarium en 2021

$$200 \times 0,85 + 45 = 170 + 45 = 215. \text{ Le nombre de poissons dans l'aquarium en 2021 sera de 215.}$$

- Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,85u_n + 45$

15% des poissons meurent chaque année donc il en reste 85% d'où $u_n \times 0,85$.

Chaque année on rajoute 45 nouveau poissons donc $u_{n+1} = 0,85 u_n + 45$

- Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 300$

- Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 300 = 0,85 u_n + 45 - 300 = 0,85 u_n - 255 = 0,85 (u_n - 300) = 0,85 v_n$$

donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,85

et de premier terme $v_0 = u_0 - 300 = 200 - 300 = -100$

- Exprimer v_n en fonction de n $v_n = v_0 \times q^n = -100 \times 0,85^n$

- En déduire que $u_n = -100 \times 0,85^n + 300$ $u_n = v_n + 300 = -100 \times 0,85^n + 300$

- Donner le sens de variation de (v_n) . En déduire celui de (u_n) . Justifier.

$$v_{n+1} - v_n = v_n \times q - v_n = v_n (1 - q) = -100 \times 0,85^n \times (-0,15) = 15 \times 0,85^n$$

$15 \times 0,85^n$ est positif donc $v_{n+1} - v_n > 0$ donc la suite (v_n) est croissante

$u_n = v_n + 300$ donc (u_n) a les mêmes variations que (v_n) donc la suite (u_n) est croissante.

Exercice 4:

(14 points)

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 1 [$ par $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

On admet que f est dérivable sur $] -\infty ; 1 [$ et on appelle C_f sa courbe représentative dans un repère.

- 1) a) Montrer que $f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $] -\infty ; 1 [$.

$f(x)$ est de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x-1$

$$u'(x) = e^x \text{ et } v'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x \times 1}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-1-1)}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

- b) Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de f sur $] -\infty ; 1 [$.

$e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$; $(x-1)^2 > 0$ sur $] -\infty ; 1 [$ donc $f'(x)$ est du signe de $x-2$.

$x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ donc sur $] -\infty ; 1 [$, $f'(x) < 0$ et **f est strictement décroissante.**

x	$-\infty$	1
signes de $g'(x)$		
variations de g		

- 2) a) Démontrer que $f''(x) = \frac{(x^2-4x+5)e^x}{(x-1)^3}$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $] -\infty ; 1 [$.

$f'(x)$ est de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = (x-2)e^x$ et $v(x) = (x-1)^2$

$$u'(x) = 1 \times e^x + (x-2)e^x = e^x(x-1) \text{ et } v'(x) = 2 \times 1 \times (x-1)$$

$$f''(x) = \frac{e^x(x-1) \times (x-1)^2 - e^x(x-2) \times 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{e^x(x-1)(x^2-2x+1-2x+4)}{(x-1)^4} = \frac{e^x(x^2-4x+5)}{(x-1)^3}$$

- b) Etudier la convexité de f sur $] -\infty ; 1 [$.

$$e^x > 0 \text{ sur } \mathbb{R} ; x < 1 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 < 0$$

Signe de x^2-4x+5 : $\Delta = 16-20 = -4$ $\Delta < 0$ donc le trinôme est du signe de $a = 1$ donc positif.

$$\text{donc } x^2-4x+5 > 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

donc $f''(x)$ est négative sur $] -\infty ; 1 [$ donc **f est concave sur $] -\infty ; 1 [$.**

- c) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \text{ avec } f'(0) = -2 \text{ et } f(0) = -1$$

donc **$y = -2x - 1$ est l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.**

- d) En déduire que, sur $] -\infty ; 1 [$, $e^x \geq (-2x-1)(x-1)$

f est concave sur $] -\infty ; 1 [$ donc C_f est au-dessous de ses tangentes sur $] -\infty ; 1 [$.

$$\text{donc } \frac{e^x}{x-1} \leq -2x-1 \Leftrightarrow e^x \geq (-2x-1)(x-1) \text{ car } x-1 < 0 \text{ sur }]-\infty ; 1[.$$

Exercice 5 :

(8 points)

Partie A : Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = 2x e^{-x}$.1) a) Démontrer que, pour tout réel x dans $[0 ; 1]$, $f'(x) = 2(1 - x)e^{-x}$ $f(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = e^{-x}$

$$u'(x) = 2 \text{ et } v'(x) = -e^{-x}$$

$$f'(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} = 2e^{-x}(1 - x)$$

b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; 1]$.Signe de $f'(x)$: $2e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$. $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ donc sur $[0 ; 1]$, $f'(x) > 0$ donc **f est croissante.**

x	0	1
signes de $f'(x)$	+	
variations de f		

$$f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 2 \times e^{-1} = \frac{2}{e}$$

Partie B : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0,1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.1) Démontrer par récurrence que $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$ pour tout entier naturel n .Posons pour tout n entier naturel, P_n : " $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$ ".Initialisation : $n = 0$ $u_0 = 0,1$ et $u_1 = f(u_0) = 0,2 e^{-0,1} \approx 0,18$ donc $0 \leq u_0 < u_1 \leq 1$ donc P_0 est vérifiée.Hérédité : Soit k un entier naturel tel que P_k est vrai c'est-à-dire que $0 \leq u_k < u_{k+1} \leq 1$.Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $0 \leq u_{k+1} < u_{k+2} \leq 1$.

$$0 \leq u_k < u_{k+1} \leq 1 \Leftrightarrow f(0) \leq f(u_k) < f(u_{k+1}) \leq f(1)$$

car f est strictement croissante sur $[0;1]$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_{k+1} < u_{k+2} \leq \frac{2}{e} \leq 1$$

Donc P_{k+1} est vraie.Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n .2) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .On a démontré à la question précédente que pour tout n entier naturel, $u_n < u_{n+1}$.Cette inégalité prouve que **la suite (u_n) est croissante.**

@Exercice 6 : BONUS*(4 points)*

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5$ et $u_0 = 5$.

1) Démontrer par récurrence que $u_n < u_{n+1}$ pour tout entier naturel $n \geq 5$.

Posons pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 5, $P_n : " u_n < u_{n+1} "$.

Initialisation : $n = 5$ $u_5 = 0,3125$ et $u_6 = 0,3125 \times 5 + 0,5 \times 5 - 1,5 = 1,1563$ donc $u_5 \leq u_6$
donc P_5 est vérifiée.

Hérédité : Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 5 tel que P_k est vrai c'est-à-dire que

$$u_k \leq u_{k+1}.$$

Démontrons qu'alors P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $u_{k+1} \leq u_{k+2}$.

$$\begin{aligned} u_k \leq u_{k+1} &\Leftrightarrow 0,5 u_k \leq 0,5 u_{k+1} \\ &\Leftrightarrow 0,5 u_k + 0,5 k \leq 0,5 u_{k+1} + 0,5 k \leq 0,5 u_{k+1} + 0,5 k + 0,5 \\ &\Leftrightarrow 0,5 u_k + 0,5 k \leq 0,5 u_{k+1} + 0,5 (k + 1) \\ &\Leftrightarrow 0,5 u_k + 0,5 k - 0,5 \leq 0,5 u_{k+1} + 0,5 (k + 1) - 0,5 \\ &\Leftrightarrow u_{k+1} \leq u_{k+2} \end{aligned}$$

Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_5 est vraie et P_n est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq 5$.

2) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

On a démontré à la question précédente que pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 5,

$$u_n < u_{n+1}.$$

Cette inégalité prouve que **la suite (u_n) est croissante à partir du terme de rang 5.**

TSpe DEVOIR SURVEILLE N°2 (2h) Rattrapage**/40****Les élèves disposant d'un tiers-temps ne traiteront pas les questions précédées d'un @****Exercice 1: QCM**

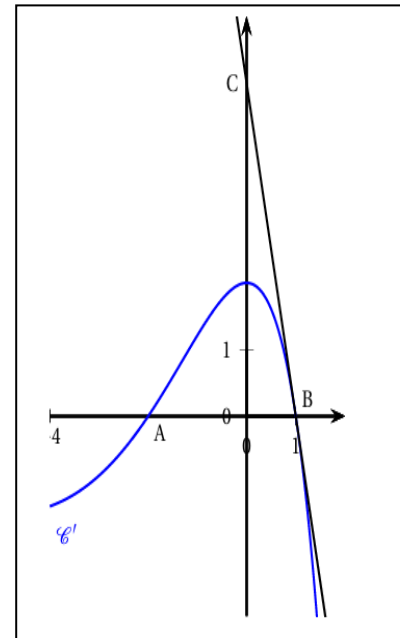
(6 points)

Pour chaque question une seule réponse est exacte. On ne demande pas de justification.

Entourer la bonne réponse sur le sujet.

- A) On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-4 ; 2]$.
On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f .
On donne ci-contre la représentation graphique C' de la fonction f' dans un repère du plan.
On a les points $A(-2 ; 0)$; $B(1 ; 0)$ et $C(0 ; 5)$.

- 1) La fonction f est :
 a. concave sur $[0 ; 2]$ b. convexe sur $[-4 ; 2]$
 c. convexe sur $[-2 ; 1]$ d. convexe sur $[0 ; 2]$
- 2) On admet que la droite (BC) est la tangente à la courbe C' au point B . On a :
 a. $f'(1) < 0$ b. $f'(1) = 5$
 c. $f''(1) < 0$ d. $f''(1) = 5$



- @ B) On considère les suites (a_n) et (b_n) définie par $a_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = -2a_n + 6$ et $b_n = a_n - 2$.
 a. (a_n) est arithmétique de raison 1 b. (b_n) est arithmétique de raison -2
 c. (a_n) est géométrique de raison 0,5 d. (b_n) est géométrique de raison 0,5

- C) Pour tout réel x , l'expression $2 - \frac{5e^{-x} - 3}{e^{-x} + 1}$ est égale à :

- a. $\frac{5e^x - 3}{1 - e^x}$ b. $\frac{5e^x + 3}{1 + e^x}$ c. $\frac{5e^x + 3}{1 - e^x}$ d. $\frac{5e^x - 3}{1 + e^x}$

- @ D) On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_{n+1} = 2w_n - 4$ et $w_3 = 8$.

On peut affirmer que :

- a. $w_0 = 0$ b. $w_0 = 4,5$ c. $w_0 = 5$ d. w_0 ne peut pas être calculé

- @ E) La quantité $3^{n-1} + 2 \times 3^n$ est égale à :

- a. $3^{n-1} (3^n + 2)$ b. $3^{n-1} + 5^n$ c. 3^{n+1} d. $7 \times 3^{n-1}$

Exercice 2:

(5 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n , $\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$

Exercice 3:

(7 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n $u_{n+1} = \sqrt{0,5 u_n^2 + 8}$.

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n^2 - 16$.
 - a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
 - b) Exprimer v_n en fonction de n
 - c) En déduire une expression de u_n en fonction de n .
- @ d) Donner le sens de variation de (v_n) . En déduire celui de (u_n) . Justifier.

Exercice 4:

(14 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{3x-1}$.

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on appelle C_f sa courbe représentative dans un repère.

- 1) a) Montrer que $f'(x) = x e^{3x-1} (3x + 2)$ pour tout réel x .
b) Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 2) a) Démontrer que $f''(x) = e^{3x-1} (9x^2 + 12x + 2)$ pour tout réel x .
b) Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
c) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.
d) En déduire que, sur $[0; +\infty[$, $x^2 e^{3x-3} \geq 5x - 4$

Exercice 5 :

(8 points)

Partie A : Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

- 1) a) Calculer $f'(x)$, pour tout réel x dans $[0; 2]$.
b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 2]$.

Partie B : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1) Démontrer par récurrence que $1 \leq u_n < u_{n+1} \leq 2$ pour tout entier naturel n .
- 2) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

@Exercice 6 : BONUS

(4 points)

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5$ et $u_0 = 5$.

- 1) Démontrer par récurrence que $u_n < u_{n+1}$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5.
- 2) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .