

TSpé DEVOIR SURVEILLE N°1

Les élèves ayant droit à un tiers temps ne traiteront pas les questions ou les exercices précédés de @

Calculatrice en mode examen.

/40**QCM :** Entourer la bonne réponse.

(7,5 points)

u et v sont deux fonctions telles que $u(x) = 5\sqrt{x} + 4$ et $v(x) = x^2 - 100$. C_u et C_v sont les courbes représentatives des fonctions u et v.

QUESTION	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
u o v est une fonction définie sur :	$[0 ; +\infty[$	$\mathbb{R}$	$] -\infty ; -10] \cup [10 ; +\infty [$	$[-10 ; 10]$
u o v a pour expression :	$5x - 96$	$(5\sqrt{x} + 4)^2 - 100$	$5x + 496$	$5\sqrt{x^2 - 100} + 4$
u o v a pour dérivée :	$5x\sqrt{x^2 - 100} + 4x$	$\frac{5}{2\sqrt{x^2 - 100}}$	$\frac{5x}{\sqrt{x^2 - 100}}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2 - 100}}$
@ v o u est une fonction définie sur :	$[0 ; +\infty[$	$\mathbb{R}$	$[0 ; 10]$	$[-10 ; 10]$
@ v o u a pour dérivée :	$5x + 20\sqrt{x}$	$5\sqrt{x}$	$25 + \frac{20}{\sqrt{x}}$	$25x + \frac{20}{\sqrt{x}}$
C_u admet pour tangente au point d'abscisse 1 la droite d'équation	$y = \frac{5}{2}x + \frac{13}{2}$	$y = 5x + \frac{13}{2}$	$y = \frac{5}{2}x + \frac{23}{2}$	$y = 9x + \frac{3}{2}$

Exercice 1 : Attention, une rédaction précise est exigée avec les propriétés/formules utilisées. (18 points)

1. Simplifier les expressions $A = \frac{e^{-4x+1} \times (e^{3x+1})^2}{e^{5x+7}}$; $B = (3e^x + 4)^2 + (4 - 2e^x)(5 + 2e^x)$

2. Résoudre , sur $\mathbb{R}$, les équations $e^{-6x^2+2x} \times e^{9x+2} = 1$ et $(2e^x + 7)(4e^x - 4) = 0$

3. Dériver les fonctions suivantes définies sur I.

$$f_1(x) = -8e^x + 3e^{-x} + 3x^2 - 7x + 2 \quad I = \mathbb{R} ; \quad f_2(x) = \frac{-3e^x + 6}{e^x + 2} \quad I = \mathbb{R} ;$$

$$f_3(x) = (3e^{-2x} - 12)^5 \quad I = \mathbb{R} ; \quad f_4(x) = \exp\left(\frac{4}{x^2+2}\right) \quad I = \mathbb{R} ;$$

@ $f_5(x) = \sqrt{x^2 + \frac{6}{x}} + 3 \quad I = \mathbb{R} \quad * \quad \text{BONUS}$

4. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'inéquation $e^{-4x+3} > e^{-2x+9}$

@ Exercice 2 :

(5 points)

Une entreprise fabrique des montres connectées.

Le coût de production, par semaine, de x milliers de montres connectées, en milliers d'euros,

est donné par la fonction C définie sur $[0 ; 6]$ par $C(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 5x + 11$.

On dit que les rendements marginaux décroissent (cela signifie que le coût de production augmente mais de manière moins rapide) lorsque la fonction C devient convexe.

A partir de quelle quantité de production les rendements marginaux diminuent-ils ?

Exercice 3 :

(11,25 points)

L'altitude, en km, d'une fusée téléguidée à l'instant t, en minute, est donnée par la fonction $f(t) = 11t \times e^{-4t}$ On considère que la fonction f est définie pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 2]$.On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.1. Etudier les variations de la fonction f sur $[0 ; 2]$.

2. En déduire, à quel instant, en seconde, la fusée est la plus haute.

3. A quels instants, la trajectoire de la fusée est-elle concave ?

QCM :

Question 1 : c. $] -\infty ; -10] \cup [10 ; +\infty [$; Question 2 : d. $5\sqrt{x^2 - 100} + 4$; Question 3 : c. $\frac{5x}{\sqrt{x^2 - 100}}$

Question 4 : a. $[0 ; +\infty [$; Question 5 : c. $25 + \frac{20}{\sqrt{x}}$ Question 6 : a. $y = \frac{5}{2}x + \frac{13}{2}$

Exercice 1 :

$$1. \quad A = \frac{e^{-4x+1} \times (e^{3x+1})^2}{e^{5x+7}} = \frac{e^{2x+3}}{e^{5x+7}} = e^{-3x-4}$$

$$\begin{aligned} B &= (3e^x + 4)^2 + (4 - 2e^x)(5 + 2e^x) \\ &= 9e^{2x} + 24e^x + 16 + 20 - 10e^x + 8e^x - 4e^{2x} \\ &= 5e^{2x} + 22e^x + 36 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} 2. \quad e^{-6x^2+2x} \times e^{9x+2} = 1 & \Delta = 11^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 169 = 13^2 \\ e^{-6x^2+11x+2} = 1 & x_1 = \frac{-11-13}{-12} = 2 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-11+13}{-12} = -\frac{1}{6} \\ e^{-6x^2+11x+2} = e^0 & S = \left\{ -\frac{1}{6}; 2 \right\} \\ -6x^2 + 11x + 2 = 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} (2e^x + 7)(4e^x - 4) &= 0 & A \times B = 0 &\Leftrightarrow A=0 \text{ ou } B=0 \text{ équation produit nul} \\ 2e^x + 7 &= 0 & \text{ou} & 4e^x - 4 = 0 \\ e^x &= -\frac{7}{2} & \text{ou} & e^x = 1 \\ \text{Pas de solution} & & \text{ou} & x = 0 & \text{Donc } S = \{ 0 \}. \end{aligned}$$

$$3. \quad f'_1(x) = -8e^x - 3e^{-x} + 6x - 7$$

f_2 est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = -3e^x + 6$ et $v(x) = e^x + 2$

$$\begin{aligned} u'(x) &= -3e^x \quad \text{et} \quad v'(x) = e^x \\ f'_2(x) &= \frac{-3e^x(e^x + 2) - (-3e^x + 6)e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{-12e^x}{(e^x + 2)^2} \end{aligned}$$

f_3 est de la forme u^5 avec $u(x) = 3e^{-2x} - 12$ et $u'(x) = -6e^{-2x}$
 $f'_3(x) = -5 \times 6e^{-2x} (3e^{-2x} - 12)^4 = -30e^{-2x} (3e^{-2x} - 12)^4$

f_4 est de la forme e^u avec $u(x) = \frac{4}{x^2 + 2}$ donc $u'(x) = \frac{-8x}{(x^2 + 2)^2}$

$$f'_4(x) = \frac{-8x}{(x^2 + 2)^2} \exp\left(\frac{4}{x^2 + 2}\right)$$

BONUS : f_5 est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + \frac{6}{x} + 3$

$$\text{donc } u'(x) = 2x - \frac{6}{x^2} = 2\left(x - \frac{3}{x^2}\right) = 2\left(\frac{x^3 - 3}{x^2}\right)$$

$$f'_5(x) = \frac{x^3 - 3}{x^2 \sqrt{x^2 + \frac{6}{x} + 3}}$$

$$\begin{array}{lll} 4. \quad e^{-4x+3} > e^{-2x+9} & e^a > e^b \Leftrightarrow a > b & \text{donc } -4x + 3 > -2x + 9 \\ & \text{car la fonction exponentielle} & -2x > 6 \\ & \text{est strictement croissante sur } \mathbb{R} & x < -3 \quad S =] -\infty ; -3 [\end{array}$$

Exercice 2 :

$$C'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 5 \quad C''(x) = x^2 - 3x - 4$$

Signe de $C''(x)$: $\Delta = 25$ $x_1 = -1$ ou $x_2 = 4$			
x	0	4	6
Signe de $C''(x)$	-	0	+
	signe de a		

Sur $[4 ; 6]$, C'' est positive donc C est convexe.

Donc les rendements marginaux diminuent pour un nombre de montres produites compris entre 4000 et 6000.

Exercice 3 :

1. $f'(t) = 11e^{-4t} + (11t)(-4e^{-4t}) = (11 - 44t)e^{-4t} = 11(1 - 4t)e^{-4t}$

Signe de $f'(t)$:

Sur $[0 ; 2]$, $e^{-4t} > 0$ donc $f'(t)$ sera du signe de $11 - 44t$.

$$11 - 44t > 0 \Leftrightarrow -44t > -11 \Leftrightarrow t < \frac{11}{44} \Leftrightarrow t < \frac{1}{4}$$

Sur $[0 ; \frac{1}{4}]$, $f'(t) \geq 0$ donc f sera croissante

et sur $[\frac{1}{4} ; 2]$, $f'(t) \leq 0$ donc f sera décroissante.

t	0	$\frac{1}{4}$	2
Variations de f	0	$\frac{11}{4e}$	$22e^{-8}$

$$f(0) = 11 \times 0 \times e^0 = 0 ; f\left(\frac{1}{4}\right) = 11 \times \frac{1}{4} \times e^{-1} = \frac{11}{4} \times e^{-1} = \frac{11}{4e} ; f(2) = 11 \times 2 \times e^{-8} = 22 \times e^{-8}$$

2. La fusée est la plus haute au bout de 15 secondes.

3. $f''(t) = -44e^{-4t} + (-44t + 11)(-4e^{-4t}) = (176t - 88)e^{-4t} = 44(4t - 2)e^{-4t}$

Signe de $f''(t)$:

Sur $[0 ; 2]$, $e^{-4t} > 0$ donc $f''(t)$ sera du signe de $176t - 88$:

$$176t - 88 > 0 \Leftrightarrow 176t > 88 \Leftrightarrow t > \frac{88}{176} \Leftrightarrow t > 0,5$$

Sur $[0 ; 0,5]$, $f''(t) \leq 0$ donc f sera concave

et sur $[0,5 ; 2]$, $f''(t) \geq 0$ donc f sera convexe.

La trajectoire de la fusée sera donc concave pendant les 30 premières secondes après le départ.