

TSpé DEVOIR SURVEILLE N°1**/40****QCM :**

(7 points)

➤ **u et v sont deux fonctions telles que $u(x) = \frac{3}{x}$ et $v(x) = x^2 - 4x + 3$**

Question 1 : $u \circ v$ est une fonction définie sur :

- a. $\mathbb{R}$ b. $\mathbb{R}^*$ c. $\mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$ d. $\mathbb{R} \setminus \{-3; -2\}$

Question 2 : $v \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

- a. $\frac{3}{x^2 - 4x + 3}$ b. $\frac{9}{x^2} - \frac{12}{x} + 3$ c. $\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} + 3$ d. $\frac{9}{x^2} - \frac{4}{x} + 3$

Question 3 : $u \circ v$ a pour dérivée :

- a. $\frac{-6x + 12}{(x^2 - 4x + 3)^2}$ b. $-\frac{3}{x^2} \left(\frac{6}{x} - 4 \right)$ c. $\frac{6x - 12}{(x^2 - 4x + 3)^2}$ d. $-\frac{3}{x^2} (2x - 4)$

➤ **f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ et C_f est sa courbe représentative.**

Question 4 : f a pour dérivée :

- a. $\frac{1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$ b. $\frac{-2x - 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$ c. $\frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ d. $\frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$

Question 5 : C_f admet pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation :

- a. $y = \frac{1}{2}x + 1$ b. $y = x + \frac{1}{2}$ c. $y = \frac{1}{4}x + 1$ d. $y = \frac{1}{2}x - 1$

Exercice 1 :

(14,75 points)

1. Simplifier les expressions $A = \frac{e^{-2x} \times (e^{3x+1})^2}{e^{5x+5}}$; $B = (e^x + e^{-x})^2 + (5 - e^x)(2 + 3e^x)$

2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations $e^{-6x+7} = 1$ et $(3e^x + 7)(e^x - 1) = 0$

3. Dériver les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$

$f_1(x) = -5e^x + 3e^{-x} + 3x^2 - 7x + 2$; $f_2(x) = \frac{3e^x - 4}{e^x + 2}$; $f_3(x) = (4e^{2x} + 8)^3$

4. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'inéquation $e^{-4x+3} > e^{x^2+x+9}$

Exercice 2 :

(12,25 points)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 4]$ par : $f(x) = (7x - 5)e^{-x}$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. (a) Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $[0; 4]$.

(b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 4]$

(Les valeurs des images seront, si nécessaire, arrondies au centième).

2. Montrer que, sur l'intervalle $[0; 4]$, $f''(x) = (7x - 19)e^{-x}$

3. Etudier la convexité de f et justifier que la courbe C_f admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

4. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 .

5. En déduire que sur $[0; \frac{19}{7}]$, $(7x - 5)e^{-x} \leq 12x - 5$

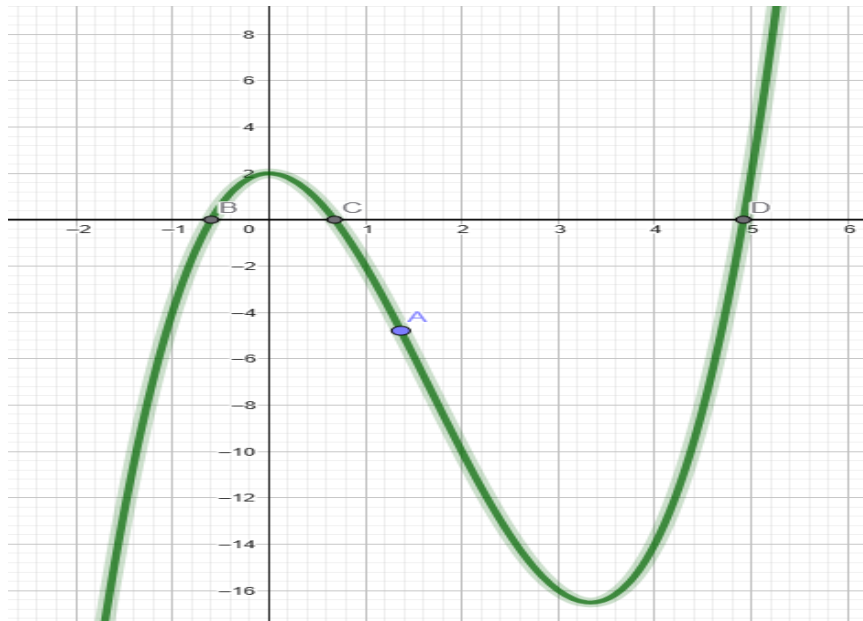
Exercice 3 :

(6 points)

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable.

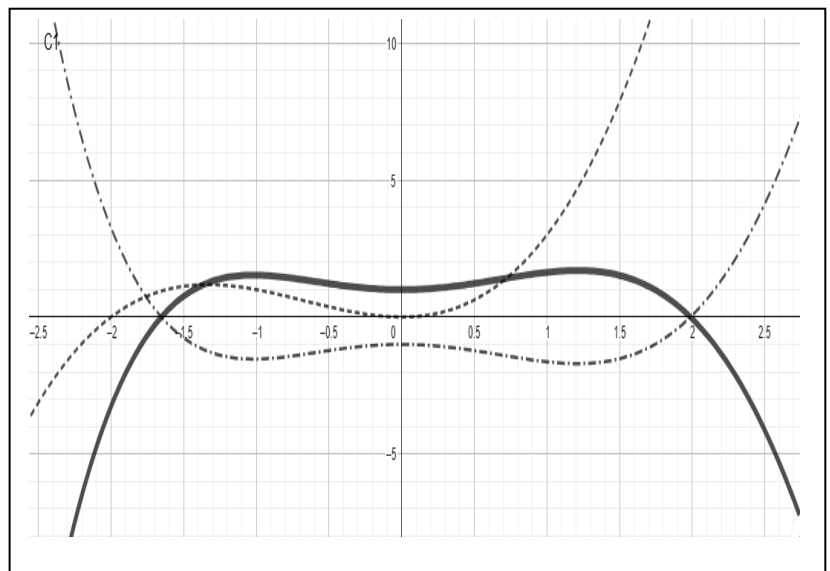
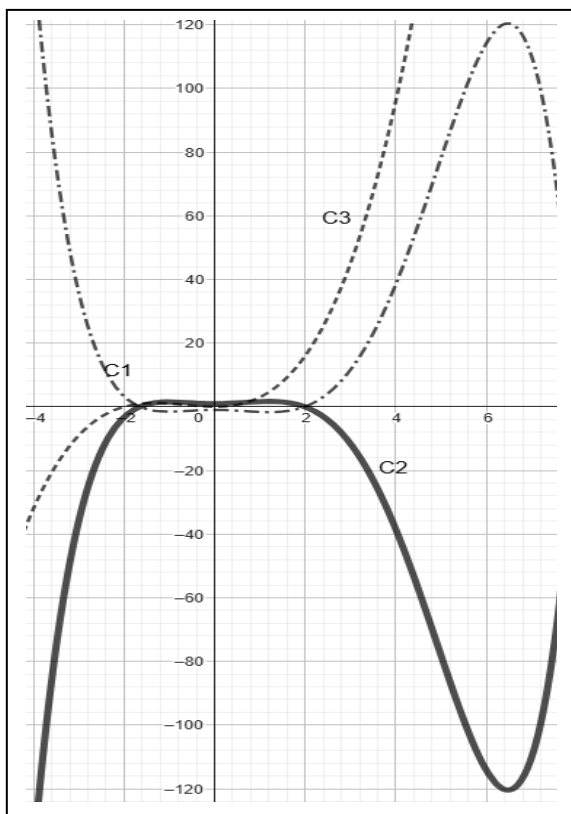
On donne ci-dessous **la courbe représentative de la fonction f''** , dérivée seconde de la fonction f , dans un repère orthonormé.

Les points suivants appartiennent à la courbe : $A(\frac{4}{3}; -\frac{122}{27})$; $B(-0,6; 0)$; $C(0,68; 0)$; $D(4,92; 0)$



Dans tout cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

1. La courbe représentative de f admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur $[-2; 6]$, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. Parmi les trois courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.



Les mêmes courbes avec un zoom sur l'intervalle $[-2,5; 2,5]$

Devoir n°1 (Surveillé le 23 septembre 2025) CORRECTION

QCM :

$$u \circ v(x) = u(x^2 - 4x + 3) = \frac{3}{x^2 - 4x + 3} \quad \text{et} \quad v \circ u(x) = v\left(\frac{3}{x}\right) = \left(\frac{3}{x}\right)^2 - 4 \times \frac{3}{x} + 3 = \frac{9}{x^2} - \frac{12}{x} + 3$$

Question 1 : réponse c $x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Delta = 4 \quad x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = 3$ ce sont les valeurs interdites.

Question 2 : réponse b

Question 3 : réponse a $\frac{-3(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{-6x+12}{(x^2-4x+3)^2}$

Question 4 : réponse d formule de la dérivée de $\sqrt{u(x)}$

Question 5 : réponse a $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

Exercice 1 :

1. $A = \frac{e^{-2x} \times (e^{3x+1})^2}{e^{5x+5}} = \frac{e^{-2x} \times e^{6x+2}}{e^{5x+5}} = \frac{e^{4x+2}}{e^{5x+5}} = e^{-x-3}$

$$B = (e^x + e^{-x})^2 + (5 - e^x)(2 + 3e^x) = e^{2x} + 2 + e^{-2x} + 10 + 15e^x - 2e^x - 3e^{2x} = -2e^{2x} + e^{-2x} + 13e^x + 12$$

2. $e^{-6x+7} = 1 \Leftrightarrow e^{-6x+7} = e^0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{6} \quad S = \left\{\frac{7}{6}\right\}$

$$\begin{array}{ll} (3e^x + 7)(e^x - 1) = 0 & \text{Equation produit-nul : } A \times B = 0 \text{ si } A = 0 \text{ ou } B = 0 \\ 3e^x + 7 = 0 & \text{ou} \quad e^x - 1 = 0 \\ e^x = -\frac{7}{3} & \text{ou} \quad e^x = 1 \end{array}$$

une exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$
donc pas de solution

$$e^x = e^0 \\ x = 0$$

$$\text{Donc } S = \{0\}$$

3. $f'_1(x) = -5e^x - 3e^{-x} + 6x - 7 \quad f'_2(x) = \frac{3e^x(e^x + 2) - (3e^x - 4)e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^x(3e^x + 6 - 3e^x + 4)}{(e^x + 2)^2} = \frac{10e^x}{(e^x + 2)^2}$
 $f'_3(x) = 3 \times 8e^{2x}(4e^{2x} + 8)^2 = 24e^{2x}(4e^{2x} + 8)^2$

4. $e^{-4x+3} > e^{x^2+x+9} \quad e^a > e^b \text{ ssi } a > b \quad -4x + 3 > x^2 + x + 9 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 < 0$

$$\Delta = 1 \quad x_1 = -3 \quad \text{ou} \quad x_2 = -2$$

Le trinôme est du signe de a donc positif à l'extérieur des racines
donc $S =]-3; -2[$

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 4]$ par : $f(x) = (7x - 5)e^{-x}$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. (a) $f'(x) = 7e^{-x} + (7x - 5)(-e^{-x}) = (-7x + 12)e^{-x}$

(b) Sur $[0; 4]$, $e^{-x} > 0$ donc f' sera du signe de $-7x + 12$.

$$-7x + 12 \geq 0 \Leftrightarrow -7x \geq -12 \Leftrightarrow x \leq \frac{12}{7}$$

Sur $[0; \frac{12}{7}]$, $f'(x) \geq 0$ donc f sera croissante et sur $[\frac{12}{7}; 4]$, $f'(x) \leq 0$ donc f sera décroissante.

x	0	$\frac{12}{7}$	4
Variations de f	-5	$\approx 1,26$	$\approx 0,42$

2. $f''(x) = -7e^{-x} + (-7x + 12)(-e^{-x}) = (-7 + 7x - 12)e^{-x} = (7x - 19)e^{-x}$

3. Sur $[0 ; 4]$, $e^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ sera du signe de $7x - 19$.

$$7x - 19 \geq 0 \Leftrightarrow 7x \geq 19 \Leftrightarrow x \geq \frac{19}{7}$$

Sur $[\frac{19}{7} ; 4]$, $f''(x) \geq 0$ donc f sera convexe et sur $[0 ; \frac{19}{7}]$, $f''(x) \leq 0$ donc f sera concave.

4. $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ donc $y = 12x - 5$ est l'équation de la tangente à C_f en 0.

5. Sur $[0 ; \frac{19}{7}]$, f est concave donc les tangentes se situent au-dessus de C_f càd que $(7x - 5)e^{-x} \leq 12x - 5$

Exercice 3 :

1. La fonction f'' s'annule en changeant de signe aux points d'abscisses $-0,6$; $0,68$ et $4,92$.

Donc C_f admet 3 points d'inflexion : B , C et D.

2. Sur $[-2 ; -0,6[$ et sur $]0,68 ; 4,92[$ $f''(x) < 0$ donc f est concave.

Sur $] -0,6 ; 0,68[$ et sur $]4,92 ; 6[$ $f''(x) > 0$ donc f est convexe.

3. C_2 est la bonne réponse car c'est la seule courbe qui présente la bonne convexité sur les bons intervalles.