

Corrigé exercice 85 :

Partie A : Étude graphique

1. La concentration initiale est 2 g.L^{-1} .
2. La concentration devient inférieure à $0,5 \text{ g.L}^{-1}$ à partir d'environ 7,8 h soit environ 7 h 50 min.
3. Le point d'inflexion a pour coordonnées $(4; 1,30)$ environ.

Partie B : Étude algébrique

Pour tout $x \in [0; 10]$, on a : $C(x) = 0,001x^3 - 0,02x^2 - 0,1x + 2$.

1. C est un polynôme donc est dérivable sur $[0; 10]$.

Pour tout $x \in [0; 10]$, $C'(x) = 0,003x^2 - 0,04x - 0,1$.

Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = (-0,04)^2 - 4 \times 0,003 \times (-0,1) = 0,0028$
donc il admet deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-0,04) - \sqrt{0,0028}}{2 \times 0,003} \approx -2,15 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-0,04) + \sqrt{0,0028}}{2 \times 0,003} \approx 15,49$$

Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines et négatif à l'intérieur. On obtient ainsi le tableau de variations suivant.

x	0	10
Signe de $C'(x)$	-	
Variations de C	$\begin{matrix} 2 & \searrow & 0 \end{matrix}$	

2. À la calculatrice on obtient $7,7 \leq \alpha \leq 7,8$, où α est la solution de cette équation.

deg	FONCTIONS	
	Fonctions	Graphique
	Régler l'intervalle	
	f	0.563
	7.1	0.639711
	7.2	0.616448
	7.3	0.593217
	7.4	0.570024
	7.5	0.546875
	7.6	0.523776
	7.7	0.500733
	7.8	0.477752

En continuant l'algorithme de balayage pour obtenir l'encadrement demandé, on obtient $7,70 \leq \alpha \leq 7,71$.

deg	FONCTIONS	
	Fonctions	Graphique
	Régler l'intervalle	
	x	$f(x)$
	7.7	0.500733
	7.71	0.498432
	7.72	0.4961316
	7.73	0.4938319
	7.74	0.4915328
	7.75	0.4892344
	7.76	0.4869366

3. C' est un polynôme donc est dérivable sur $[0; 10]$. Pour tout $x \in [0; 10]$, $C''(x) = 0,006x - 0,04$.

$C''(x)$ est négative sur $\left[0; \frac{20}{3}\right]$ et positive sur $\left[\frac{20}{3}; 10\right]$.

Donc C est concave sur $\left[0; \frac{20}{3}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{20}{3}; 10\right]$.

Partie C : Interprétation des résultats

1. Il faut faire une injection au bout d'environ 7,71 h soit 7 h 42 minutes environ.
2. La baisse de la concentration ralentit lorsque fonction devient convexe, soit environ au bout de 6,6 h (6 h 36 minutes).

Corrigé exercice 91 :

1.

- a. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions définies et dérivables sur cet ensemble.

Et, pour tout réel x , $f'(x) = 1 + (xe^{-x})' = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x} + 1$.

- b. De la même manière, la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x ,
 $f''(x) = -e^{-x} - (1 - x)e^{-x} = (x - 2)e^{-x}$.

Pour tout réel x , on a $e^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 2$.

Ainsi, f'' est négative sur $]-\infty; 2]$ et positive sur $[2; +\infty[$.

Donc f' est décroissante sur $]-\infty; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$.

- c. La fonction f' admet un minimum en $x = 2$ qui vaut $f'(2) = 1 + (1 - 2)e^{-2} = 1 - e^{-2} \approx 0,86$.
 Ainsi, pour tout réel x , on a $f'(x) \geq f'(2) > 0$.

- d. Comme $f'(x) > 0$ pour tout réel x , on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de f		

- e. On a $f(0) = 0 + 1 + 0 \times e^{-0} = 1$ et $f'(0) = 1 + (1 - 0)e^{-0} = 1 + e^0 = 2$.
 Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donc
 $y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow y = 2x + 1$.

- f. Comme f'' est négative sur $]-\infty; 2]$, on en déduit que f est concave sur $]-\infty; 2]$
 donc, sur cet intervalle, $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de toutes ses tangentes.
 En particulier, $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0.

Ainsi, pour tout réel $x \leq 2$, on a $f(x) \leq 2x + 1$.

2.

- a. $f(x) = 2 \Leftrightarrow x + 1 + xe^{-x} = 2 \Leftrightarrow x \left(\frac{e^x + 1}{e^x} \right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

- b. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet ensemble.

Pour tout réel $x \in [0; 1]$, $h'(x) = \frac{e^x \times (e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

Or, pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a $e^x > 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$. D'où $h'(x) > 0$.

x	0	1
Signe de $h'(x)$	+	
Variations de h		

- c. On a $\frac{1}{2} \geq 0$ et $\frac{e^1}{e^1 + 1} \approx 0,73 \leq 1$. Ainsi, si $0 \leq x \leq 1$, alors $0 \leq h(x) \leq 1$.