

Corrigé exercice 25 :

1. f est la composée des fonctions u et v par $u(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ et $v(x) = x^5$.

Les fonctions u et v sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f aussi.

f est de la forme $f = v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 3x^2 + 4x + 3$ et $v'(x) = 5x^4$.

D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = 5(3x^2 + 4x + 3)(x^3 + 2x^2 + 3x + 4)^4$.

2. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = x^3 + \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ et $v(x) = x^6$.

La fonction u est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. La fonction v est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.

Donc $\mathcal{D}_{f'} =]0; +\infty[$.

f est de la forme $f = v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 6x^5$.

D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = 6 \left(3x^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \left(x^3 + \frac{1}{x} + \sqrt{x} \right)^5$.

Corrigé exercice 26 :

1. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \frac{x-4}{x+3}$ et $v(x) = x^4$.

La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. La fonction v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

f est de la forme $f = v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec

$$u'(x) = \frac{1 \times (x+3) - 1 \times (x-4)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}$$

et $v'(x) = 4x^3$.

D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \frac{28}{(x+3)^2} \left(\frac{x-4}{x+3} \right)^3$.

2. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \sqrt{3x+5}$ et $v(x) = x^3$.

La fonction u est définie et dérivable sur $\left] -\frac{5}{3}; +\infty \right[$. La fonction v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc $\mathcal{D}_{f'} = \left] -\frac{5}{3}; +\infty \right[$.

$f = v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+5}}$ et $v'(x) = 3x^2$.

D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \frac{9}{2\sqrt{3x+5}} \left(\sqrt{3x+5} \right)^2 = \frac{9\sqrt{3x+5}}{2}$.

Corrigé exercice 27 :

1. f est le produit des fonctions u et v définies par $u(x) = (x^2 + 3x + 2)^2$ et $v(x) = (2x^2 - 5x + 7)^3$.

Ces fonctions sont des polynômes donc sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = x^2 + 3x + 2$ et $h(x) = x^2$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = 2x + 3$ et $h'(x) = 2x$. D'où $u'(x) = 2(2x + 3)(x^2 + 3x + 2)$.

De même, $v = q \circ p$ avec $p(x) = 2x^2 - 5x + 7$ et $q(x) = x^3$ donc $v' = p' \times q' \circ p$ avec $p'(x) = 4x - 5$ et $q'(x) = 3x^2$. D'où $v'(x) = 3(4x - 5)(2x^2 - 5x + 7)^2$.

Ainsi, après réduction et factorisation de l'expression, on obtient

$$f'(x) = (x^2 + 3x + 2) (2x^2 - 5x + 7)^2 (20x^3 + 13x^2 - 23x + 12).$$

2. f est le produit des fonctions u et v définies par $u(x) = (x^3 + 5x^2 + 4)^2$, dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme, et $v(x) = e^{x^4 - 8x^2}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = x^3 + 5x^2 + 4$ et $h(x) = x^2$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = 3x^2 + 10x$ et $h'(x) = 2x$.

D'où, $u'(x) = 2(3x^2 + 10x)(x^3 + 5x^2 + 4) = 2x(3x + 10)(x^3 + 5x^2 + 4)$.

De même, $v = q \circ p$ avec $p(x) = x^4 - 8x^2$ et $q(x) = e^x$ donc $v' = p' \times q' \circ p$ avec $p'(x) = 4x^3 - 16x$ et $q'(x) = e^x$. D'où $v'(x) = (4x^3 - 16x)e^{x^4 - 8x^2} = 4x(x^2 - 4)e^{x^4 - 8x^2}$.

Ainsi, après réduction et factorisation de l'expression, on obtient

$$f'(x) = 2x(x^3 + 5x^2 + 4)e^{x^4 - 8x^2} (2x^5 + 10x^4 - 8x^3 - 32x^2 + 3x - 22).$$

Corrigé exercice 28 :

1. f est le produit des fonctions u et v définies par $u(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$ et $v(x) = (x^3 + 5x - 8)^3$.

La fonction u est définie et dérivable lorsque $-x^2 + 3x - 2 > 0$

c'est-à-dire sur $]1; 2[$. La fonction v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. D'où $\mathcal{D}_{f'} =]1; 2[$.

De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = -x^2 + 3x - 2$ et $h(x) = \sqrt{x}$ donc $u' = g' \times h' \circ g$

avec $g'(x) = -2x + 3$ et $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\text{D'où } u'(x) = (-2x + 3) \times \frac{1}{2\sqrt{-x^2 + 3x - 2}} = \frac{-2x + 3}{2\sqrt{-x^2 + 3x - 2}}.$$

De même, $v = q \circ p$ avec $p(x) = x^3 + 5x - 8$ et $q(x) = x^3$ donc $v' = p' \times q' \circ p$

avec $p'(x) = 3x^2 + 5$ et $q'(x) = 3x^2$. D'où $v'(x) = 3(3x^2 + 5)(x^3 + 5x - 8)^2$.

Ainsi, après réduction et factorisation de l'expression, on obtient

$$f'(x) = \frac{(x^3 + 5x - 8)^2}{2\sqrt{-x^2 + 3x - 2}} [-20x^4 + 57x^3 - 76x^2 + 121x - 84].$$

2. f est le produit des fonctions u et v définies par $u(x) = e^{-x^2+7}$ et $v(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions définies et dérivables sur cet ensemble. La fonction v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 4 > 0$. D'où $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = -x^2 + 7$ et $h(x) = e^x$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = -2x$ et $h'(x) = e^x$. D'où $u'(x) = -2xe^{-x^2+7}$.

De même, $v = q \circ p$ avec $p(x) = x^2 + 4$ et $q(x) = \sqrt{x}$ donc $v' = p' \times q' \circ p$ avec $p'(x) = 2x$

et $q'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. D'où $v'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

Ainsi,

$$f'(x) = -2xe^{-x^2+7} \times \sqrt{x^2 + 4} + e^{-x^2+7} \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

c'est-à-dire
$$f'(x) = \frac{xe^{-x^2+7}(-2x^2 - 7)}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

Corrigé exercice 29 :

1. f est le quotient des fonctions u et v définies par $u(x) = \sqrt{2x+3}$ et $v(x) = x^2 - x + 4$. v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule pas sur I . u est dérivable lorsque $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$. D'où

$$\mathcal{D}_{f'} = \left] -\frac{3}{2}; +\infty \right[$$

De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = 2x + 3$ et $h(x) = \sqrt{x}$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = 2$ et

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{D'où } u'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

$$\text{et } v'(x) = 2x - 1.$$

$$\text{D'où, } f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2x+3}}(x^2 - x + 4) - \sqrt{2x+3}(2x - 1)}{(x^2 - x + 4)^2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad f'(x) = \frac{-3x^2 - 5x + 7}{\sqrt{2x+3}(x^2 - x + 4)^2}$$

2. f est le quotient des fonctions u et v définies par $u(x) = e^{-x^2+5x+4}$ et $v(x) = x + 7$. La fonction v est dérivable et ne s'annule pas sur I . La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur cet ensemble. D'où $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$.

De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = -x^2 + 5x + 4$ et $h(x) = e^x$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = -2x + 5$ et $h'(x) = e^x$.

$$\text{D'où } u'(x) = (-2x + 5)e^{-x^2+5x+4} \quad \text{et} \quad v'(x) = 1.$$

$$\text{D'où, } f'(x) = \frac{(-2x + 5)e^{-x^2+5x+4}(x + 7) - e^{-x^2+5x+4} \times 1}{(x + 7)^2}, \text{ c'est-à-dire}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x^2+5x+4}[-2x^2 - 9x + 34]}{(x + 7)^2}.$$

Corrigé exercice 30 :

1. f est le quotient des fonctions u et v définies par $u(x) = (x^3 + 4)^5$ et $v(x) = (x^2 + 3x - 4)^3$. u et v sont dérivables sur I comme polynômes, et v ne s'annule pas sur cet ensemble. Donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$.

De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = x^3 + 4$ et $h(x) = x^5$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = 3x^2$ et $h'(x) = 5x^4$. D'où $u'(x) = 15x^2(x^3 + 4)^4$.

Et $v = q \circ p$ avec $p(x) = x^2 + 3x - 4$ et $q(x) = x^3$ donc $v' = p' \times q' \circ p$ avec $p'(x) = 2x + 3$ et $q'(x) = 3x^2$. D'où $v'(x) = 3(2x + 3)(x^2 + 3x - 4)^2$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$,

$$f'(x) = \frac{15x^2(x^3 + 4)^4(x^2 + 3x - 4)^3 - (x^3 + 4)^5 \times 3(2x + 3)(x^2 + 3x - 4)^2}{(x^2 + 3x - 4)^6}$$

$$f'(x) = \frac{3(x^3 + 4)^4 [3x^4 + 12x^3 - 20x^2 - 8x - 12]}{(x^2 + 3x - 4)^4}.$$

2. f est le quotient des fonctions u et v définies sur I par $u(x) = e^{2x^3+x^2-7x+2}$ et $v(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. v est dérivable lorsque $x^2 + x + 1 > 0$, ce qui est le cas pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = 2x^3 + x^2 - 7x + 2$ et $h(x) = e^x$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = 6x^2 + 2x - 7$ et $h'(x) = e^x$. D'où $u'(x) = (6x^2 + 2x - 7)e^{2x^3+x^2-7x+2}$.

Et $v = q \circ p$ avec $p(x) = x^2 + x + 1$ et $q(x) = \sqrt{x}$ donc $v' = p' \times q' \circ p$ avec $p'(x) = 2x + 1$ et $q'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. D'où $v'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$,

$$f'(x) = \frac{(6x^2 + 2x - 7)e^{2x^3+x^2-7x+2}\sqrt{x^2 + x + 1} - e^{2x^3+x^2-7x+2} \times \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}}{(\sqrt{x^2 + x + 1})^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x^3+x^2-7x+2} [12x^4 + 16x^3 + 2x^2 - 12x - 15]}{2(\sqrt{x^2 + x + 1})^3}.$$