

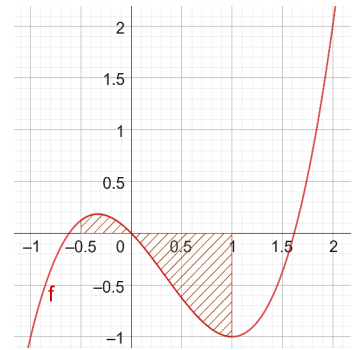
Exercice 2 :**(16 points)****A.** Calculer les valeurs exactes des intégrales suivantes :

$$1) I = \int_1^2 x - \frac{2}{x^3} + e^{-x} dx ; \quad 2) J = \int_0^1 12x^2(x^3+1)^3 dx \quad @ 3) K = \int_1^e (4x+1) \ln x dx$$

(Pour K, on fera une intégration par parties.)

B. Soit f la fonction définie sur $[-0,5 ; 1]$ par $f(x) = x(x^2 - x - 1)$, dont on donne la courbe représentative ci-contre.

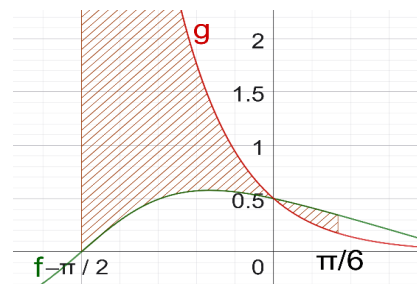
- Calculer l'aire du domaine hachuré compris entre C_f et (Ox) sur $[-0,5 ; 1]$.
- Calculer la valeur moyenne de f sur $[-0,5 ; 1]$.
- Déterminer les valeurs exactes du minimum noté m et du maximum noté M de f .
- En déduire un encadrement de la valeur moyenne de f sur $[-0,5 ; 1]$.

**@ C.** Soient les fonctions f et g définies sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{6}]$ par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2} e^{-2x}$$

et dont on donne les représentations graphiques ci-contre.

Déterminer l'aire, en u.a., du domaine hachuré compris entre C_f et C_g sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{6}]$. (On pourra utiliser le graphique pour lire la position des deux courbes)

**Exercice 3 :****(14 points)**On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

- A l'aide d'une intégration par parties vérifier que $u_1 = e - 2$.
- Justifier que pour tout $x \in [0 ; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$.
 - En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$
 - Montrer que la suite (u_n) est convergente.

@ 3. a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.

b. On considère le script Python ci-contre définissant la fonction suite() :

Compléter le script Python ci-dessus pour que la fonction suite() renvoie la valeur de $\int_0^1 x^8 e^{1-x} dx$

```

from math import exp
def suite():
    u = ...
    for n in range(1, ...):
        u = ...
    return

```

BONUS :

- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $u_n \leq \frac{e}{n+1}$.
 - En déduire la limite de la suite (u_n) .

CORRIGE

1. Le nombre de séquences possibles est :

- a. $4!$ b. $\binom{64}{4}$ c. 16 777 216 d. $64 \times 63 \times 62 \times 61$

2. Le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux est :

- a. $\frac{64!}{4!}$ b. 64^4 c. 635 376 d. 15 249 024

3. Le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule est :

- a. $\binom{63}{3}$ b. 63^4 c. $63 \times 62 \times 61$ d. 3^{63}

4. Le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule est :

- a. 1 024 255 b. 15 249 024 c. 64×63^3 d. 16 777 216

5. Le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule est :

- a. $\binom{63}{3}$ b. 63^3 c. $\binom{4}{1} \times 63^3$ d. $\frac{63!}{(63-3)!}$

@ 6. Le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule est :

- a. 6×63^2 b. 2×63^2 c. $\binom{62}{2}$ d. $2 \times 63 \times 62$

1. Pour chaque caractère, il y a 64 possibilités, donc pour une séquences de 4 caractères, il y a 64^4 possibilités, soit 16 777 216 possibilités. On pourra noter $\text{card}(\Omega) = 16\,777\,216$.
2. Si les caractères sont différents deux à deux, il s'agit alors d'un arrangement de 4 caractères parmi 64 : $\frac{64!}{(64-4)!} = 64 \times 63 \times 62 \times 61 = 15\,249\,024$ possibilités.
3.
 - a. On reprend la question 1. avec seulement 63 caractères. cela donne donc $63^4 = 15\,752\,961$ possibilités.
 - b. Soit X l'évènement : « la séquence ne comporte pas la lettre A ». Son évènement contraire est donc : \bar{X} « la séquence comporte au moins une fois la lettre A ». Ainsi $\text{card}(X) + \text{card}(\bar{X}) = \text{card}(\Omega)$ donc $\text{card}(\bar{X}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(X) = 64^4 - 63^4 = 1\,024\,255$. Il y a donc 1 024 255 séquences contenant au moins une fois la lettre A.
 - c. La lettre A peut se situer dans l'une des quatre positions dans le code, les trois autres lettres étant différentes. Il y aura donc $4 \times 63^3 = 1\,000\,188$ possibilités.
 - d. Il y a $\binom{4}{2}$ façons de placer les deux lettres A dans la séquence. Les deux autres lettres ne sont pas des A. Il y aura donc $\binom{4}{2} \times 63^2 = 23\,814$ possibilités.

Exercice 2 :**(16 points)****A.**

$$1) I = \int_1^2 x - \frac{2}{x^3} + e^{-x} dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x^2} - e^{-x} \right]_1^2 = \left(2 + \frac{1}{4} - e^{-2} \right) - \left(\frac{1}{2} + 1 - e^{-1} \right) = \frac{3}{4} + e^{-1} - e^{-2}$$

$$2) J = \int_0^1 12x^2(x^3+1)^3 dx = \int_0^1 4u'u^3 dx \quad \text{avec } u(x) = x^3 + 1$$

$$= [(x^3+1)^4]_0^1 = 2^4 - 1 = 15$$

$$@ 3) K = \int_1^e (4x+1) \ln x dx \quad u'(x) = 4x+1; v(x) = \ln x; u(x) = 2x^2+x; v'(x) = \frac{1}{x}$$

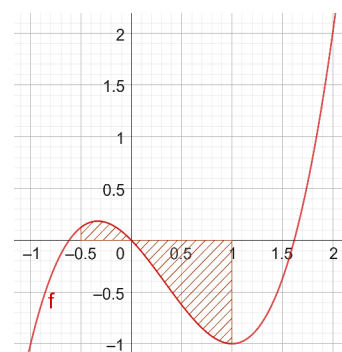
$$K = [(2x^2+x) \ln x]_1^e - \int_1^e (2x^2+x) \frac{1}{x} dx = 2e^2 + e - [x^2+x]_1^e = 2e^2 + e - e^2 - e + 2 = e^2 + 2$$

B. Soit f la fonction définie sur $[-0,5; 1]$ par $f(x) = x(x^2 - x - 1) = x^3 - x^2 - x$

1. l'aire du domaine hachuré vaut :

$$\int_{-0,5}^0 x^3 - x^2 - x dx - \int_0^1 x^3 - x^2 - x dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-0,5}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{-1}{64} - \frac{1}{24} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{125}{192}$$

2. La valeur moyenne de f sur $[-0,5; 1]$ qui vaut $\mu = \frac{1}{1 - (-0,5)} \int_{-0,5}^1 x^3 - x^2 - x dx$

$$\mu = \frac{2}{3} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-0,5}^1 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{24} - \frac{1}{8} \right) \right) = \frac{-11}{32}$$

3. Pour déterminer les valeurs exactes du minimum noté m et du maximum noté M de f , on cherche les valeurs où la dérivée s'annule en changeant de signe :

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1; \Delta = 16; x_1 = 1; x_2 = \frac{-1}{3}$$

 $f'(x)$ est un polynôme du second degré donc s'annule en changeant de signe en ses racines

$$\text{Donc } M = f\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{5}{27} \quad \text{et } m = f(1) = -1.$$

4. On a les inégalités $m \leq f(x) \leq M$ sur $[-0,5; 1]$.

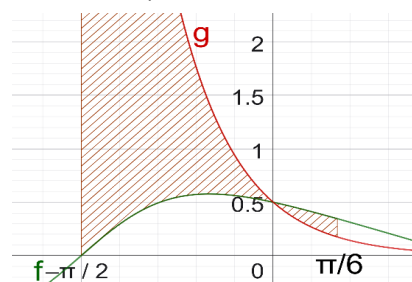
$$\text{En intégrant, on obtient : } \int_{-0,5}^1 m dx \leq \int_{-0,5}^1 x^3 - x^2 - x dx \leq \int_{-0,5}^1 M dx$$

$$\text{Donc } m \times (1 - (-0,5)) \leq \int_{-0,5}^1 x^3 - x^2 - x dx \leq M \times (1 - (-0,5)) \quad \text{et donc } m \leq \frac{1}{1 - (-0,5)} \int_{-0,5}^1 x^3 - x^2 - x dx \leq M$$

La valeur moyenne de f sur $[-0,5; 1]$ est donc comprise entre $m = -1$ et $M = \frac{5}{27}$ @ C. Soient les fonctions f et g définies sur $\left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2} e^{-2x}$$

et dont on donne les représentations graphiques ci-contre.



L'aire du domaine hachuré vaut :
$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{2} e^{-2x} - \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} -\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx$$

$$\begin{aligned} A &= \left[-\frac{1}{4} e^{-2x} - \ln(2 + \sin x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \left[\frac{1}{4} e^{-2x} + \ln(2 + \sin x) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{-1}{4} - \ln(2) + \frac{1}{4} e^{\pi} + \frac{1}{4} e^{\frac{-\pi}{3}} + \ln\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{1}{4} - \ln(2) \\ &= \frac{e^{\pi} + e^{\frac{-\pi}{3}} - 2}{4} - 2 \ln(2) + \ln\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{e^{\pi} + e^{\frac{-\pi}{3}} - 2}{4} + \ln\left(\frac{5}{8}\right) \end{aligned}$$

Exercice 3 :

(14 points)

$$u_1 = \int_0^1 x e^{1-x} dx \quad u'(x) = e^{1-x}; \quad v(x) = x; \quad u(x) = -e^{1-x}; \quad v'(x) = 1$$

$$u_1 = [-x e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-x} dx = -1 - [e^{1-x}]_0^1 = -1 - 1 + e = e - 2$$

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

On admet que $u_1 = e - 2$.

1. a. Pour $x \in [0; 1]$, on a : $0 \leq x \leq 1$.

$x \geq 0$ donc $x^n \geq 0$; on multiplie l'inégalité précédente par x^n :

$$0 \times x^n \leq x \times x^n \leq 1 \times x^n \iff 0 \leq x^{n+1} \leq x^n$$

On a donc démontré que pour tout entier naturel n , on a :

$$\boxed{0 \leq x^{n+1} \leq x^n}$$

b. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{1-x} > 0$, donc, d'après la question précédente :

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n \iff 0 \leq x^{n+1} e^{1-x} \leq x^n e^{1-x}.$$

Donc, d'après la positivité de l'intégration :

$$0 \leq x^{n+1} e^{1-x} \leq x^n e^{1-x} \implies 0 \leq \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \iff \boxed{0 \leq u_{n+1} \leq u_n}$$

c. D'après la question précédente, puisque $u_{n+1} \leq u_n$ la suite (u_n) est décroissante.

De plus, puisque $0 \leq u_n$, elle est minorée par 0.

Donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite positive ou nulle.

2. a. On sait que pour u et v dérivables on a : $\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$.

Posons $u'(x) = e^{1-x}$ et $v(x) = x^{n+1}$. Alors $u(x) = -e^{1-x}$ et $v'(x) = (n+1)x^n$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx &= [-x^{n+1} e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n (-e^{1-x}) dx \\ &= -1^{n+1} e^{1-1} - (-0^{n+1} e^{1-0}) - (n+1) \int_0^1 -x^n e^{1-x} dx \\ &= -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

- b. On complète le script Python en bleu ci-dessus pour que la fonction `suite()` renvoie la valeur de $\int_0^1 x^8 e^{1-x} dx$.

```
from math import exp

def suite() :
    u = exp(1)-2
    for n in range (1,8):
        u = (n+1) * u - 1
    return u
```

3. a. On se place dans l'intervalle d'intégration : soit $x \in [0 ; 1]$, donc $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1-x \leq 1 \Rightarrow e^{1-x} \leq e$ (croissance de la fonction exponentielle)
- $$\Rightarrow x^n e^{1-x} \leq x^n \times e \quad (x^n \geq 0)$$
- $$\Rightarrow \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n \times e dx \quad (\text{croissance de l'intégration})$$
- $$\Rightarrow \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq e \int_0^1 x^n dx \Rightarrow u_n \leq e \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$
- $$\Rightarrow u_n \leq \frac{e}{n+1}$$

- b. On sait que pour tout n , on a : $0 \leq u_n$; donc $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$