

# COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES

## LIMITES D'UNE FONCTION

Afin d'étudier de manière plus complète le comportement global d'une fonction, on est amené à se prononcer sur les évolutions des valeurs de cette fonction lorsque la variable se rapproche des bords de l'intervalle de définition.

### I. Observation des fonctions de référence :

#### 1) Fonctions puissance : $x \mapsto x^n$ , $n \in \mathbb{N}$

##### a) La fonction carré : $x \mapsto x^2$

$$D_f = \mathbb{R} = ]-\infty ; +\infty[$$

Résoudre  $x^2 \geq 36$  et interpréter graphiquement le résultat

$$x^2 \geq 36 \Leftrightarrow x \leq -6 \text{ ou } x \geq 6 \Leftrightarrow x \in ]-\infty ; -6] \cup [6 ; +\infty[.$$

Graphiquement, les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de la courbe représentative de  $f$  situés au-dessus ou sur la droite horizontale d'équation  $y = 36$ .

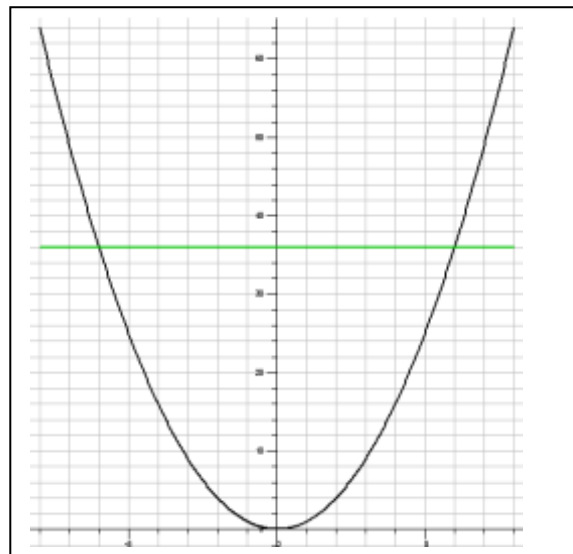
$$\text{On lit } S = ]-\infty ; -6] \cup [6 ; +\infty[.$$

$$\text{Résoudre } x^2 \geq 10^4. \quad S = ]-\infty ; -10^2] \cup [10^2 ; +\infty[$$

$$\text{Résoudre } x^2 \geq 10^{40}. \quad S = ]-\infty ; -10^{20}] \cup [10^{20} ; +\infty[$$

De façon générale, si  $A$  est un réel positif aussi grand que l'on veut, comment choisir  $x$  pour que  $x^2 \geq A$  ?

$x \in ]-\infty ; -\sqrt{A}] \cup [\sqrt{A} ; +\infty[$ . Pour que  $x^2$  soit supérieur à  $A$ , nombre positif aussi grand que l'on veut, il faut que  $x$  soit très grand ou très petit.



Quand  $x$  devient aussi grand que l'on veut, on dit que  $x$  tend vers  $+\infty$  et on note  $x \rightarrow +\infty$ .

Quand  $x$  devient aussi petit que l'on veut, on dit que  $x$  tend vers  $-\infty$  et on note  $x \rightarrow -\infty$ .

Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $x^2$  tend vers  $+\infty$ . On notera  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ .

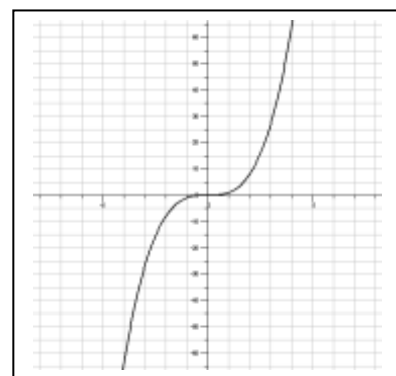
Quand  $x$  tend vers  $-\infty$ ,  $x^2$  tend vers  $+\infty$ . On notera  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ .

##### b) La fonction cube : $x \mapsto x^3$

$$D_f = \mathbb{R} = ]-\infty ; +\infty[$$

Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $x^3$  tend vers  $+\infty$ . On notera  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ .

Quand  $x$  tend vers  $-\infty$ ,  $x^3$  tend vers  $-\infty$ . On notera  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ .



##### c) Généralisation : $x \mapsto x^n$ , $n \in \mathbb{N}$ :

Si  $n$  est pair, la courbe représentative de la fonction  $x \mapsto x^n$  ressemble à celle de  $x^2$ .

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty.$$

Si  $n$  est impair, la courbe représentative de la fonction  $x \mapsto x^n$  ressemble à celle de  $x^3$ .

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty.$$

## 2) Fonctions inverse : $x \mapsto \frac{1}{x}$

$$D_f = ]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[$$

Calculer  $f(10)$  ;  $f(100)$  ;  $f(10^6)$ .

$$f(10) = \frac{1}{10} = 10^{-1} ; f(100) = \frac{1}{100} = 10^{-2} ; f(10^6) = 10^{-6}$$

Quand  $x$  devient grand,  $\frac{1}{x}$  devient petit, il se rapproche de 0.

Résoudre  $\frac{1}{x} \leq 10^{-5}$  :

$$\frac{1}{x} \leq 10^{-5} \Leftrightarrow x \geq 10^5 \text{ car la fonction inverse est décroissante donc elle perturbe l'ordre.}$$

De façon générale, si  $A$  est un réel positif aussi petit que l'on veut, comment choisir  $x$  pour que  $\frac{1}{x} \leq A$  ?

$$\frac{1}{x} \leq A \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{A} \text{ Si } A \text{ est aussi petit que l'on veut en restant positif, } \frac{1}{A} \text{ est aussi grand que l'on veut.}$$

Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $\frac{1}{x}$  tend vers 0, en restant positif. On notera  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ .

De même, quand  $x$  tend vers  $-\infty$ ,  $\frac{1}{x}$  tend vers 0, en restant négatif. On notera  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ .

Que se passe-t-il quand  $x$  se rapproche de 0 ?

✓ Quand  $x$  est aussi près que l'on veut de 0, en restant positif,  $\frac{1}{x}$  devient aussi grand que l'on veut.

$$\text{On notera } \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

✓ Quand  $x$  est aussi près que l'on veut de 0, en restant négatif,  $\frac{1}{x}$  devient aussi petit que l'on veut.

$$\text{On notera } \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

## II. Limite d'une fonction en l'infini :

### 1) Limite infinie en l'infini :

#### a) Définition :

Dire qu'une fonction  $f$  admet pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$  signifie que tout intervalle de la forme  $]A ; +\infty[$  avec  $A$  un réel aussi grand que l'on veut, contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour un  $x$  assez grand.

On note alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

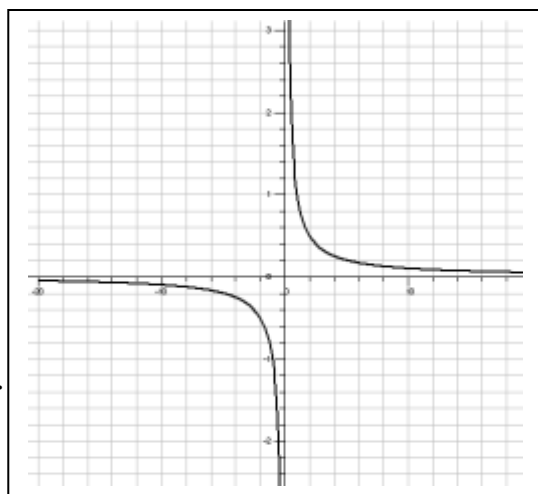
De même dire qu'une fonction  $f$  admet pour limite  $-\infty$  en  $+\infty$  signifie que tout intervalle de la forme  $] -\infty ; A[$  avec  $A$  un réel aussi petit que l'on veut, contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour un  $x$  assez grand. On note alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

Dire qu'une fonction  $f$  admet pour limite  $+\infty$  en  $-\infty$  signifie que tout intervalle de la forme  $]A ; +\infty[$  avec  $A$  un réel aussi grand que l'on veut, contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour un  $x$  assez petit.

On note alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

Dire qu'une fonction  $f$  admet pour limite  $-\infty$  en  $-\infty$  signifie que tout intervalle de la forme  $] -\infty ; A[$  avec  $A$  un réel aussi petit que l'on veut, contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour un  $x$  assez petit.

On note alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .



b) Exemple de rédaction avec la fonction carré :

□ Pour la limite en  $+\infty$  :

On choisit un réel  $A$  aussi grand que l'on veut. On cherche alors  $x > 0$  tel que  $f(x) > A$ .

$$f(x) > A \Leftrightarrow x^2 > A \Leftrightarrow x > \sqrt{A} \text{ si } x > 0$$

donc si  $x > \sqrt{A}$  toutes les valeurs de  $f(x)$  sont dans l'intervalle  $]A ; +\infty[$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

□ Pour la limite en  $-\infty$  :

On choisit un réel  $A$  aussi grand que l'on veut. On cherche alors  $x < 0$  tel que  $f(x) > A$ .

$$f(x) > A \Leftrightarrow x^2 > A \Leftrightarrow x < -\sqrt{A} \text{ si } x < 0$$

donc si  $x < -\sqrt{A}$  toutes les valeurs de  $f(x)$  sont dans l'intervalle  $]A ; +\infty[$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

.

c) Limites de référence :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

$n$  est un entier naturel.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^x = -\infty$$

**2) Limite finie  $\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{R}$  en l'infini :**

a) Définition :

Dire qu'une fonction  $f$  admet pour limite le nombre réel  $\ell$  en  $+\infty$  signifie que tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez grand. On note alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .

De même dire qu'une fonction  $f$  admet pour limite le nombre réel  $\ell$  en  $-\infty$  signifie que tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez petit. On note alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ .

b) Exemple de rédaction avec la fonction inverse :

□ Pour la limite en  $+\infty$  :

On choisit un intervalle  $] -\alpha ; \alpha [$  avec  $\alpha$  un réel positif. On cherche alors  $x > 0$  tel que  $-\alpha < f(x) < \alpha$ .

$$-\alpha < f(x) < \alpha \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < \alpha \text{ donc } x > \frac{1}{\alpha}$$

donc si  $x > \frac{1}{\alpha}$  toutes les valeurs de  $f(x)$  sont dans l'intervalle  $] -\alpha ; \alpha [$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

□ Pour la limite en  $-\infty$  :

On choisit un intervalle  $] -\alpha ; \alpha [$  avec  $\alpha$  un réel positif. On cherche alors  $x < 0$  tel que  $-\alpha < f(x) < \alpha$ .

$$-\alpha < f(x) < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < \frac{1}{x} < 0 \text{ donc } x < -\frac{1}{\alpha}$$

donc si  $x < -\frac{1}{\alpha}$  toutes les valeurs de  $f(x)$  sont dans l'intervalle  $] -\alpha ; \alpha [$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

c) Limites de référence :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\text{si } n \in \mathbb{N}^* \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

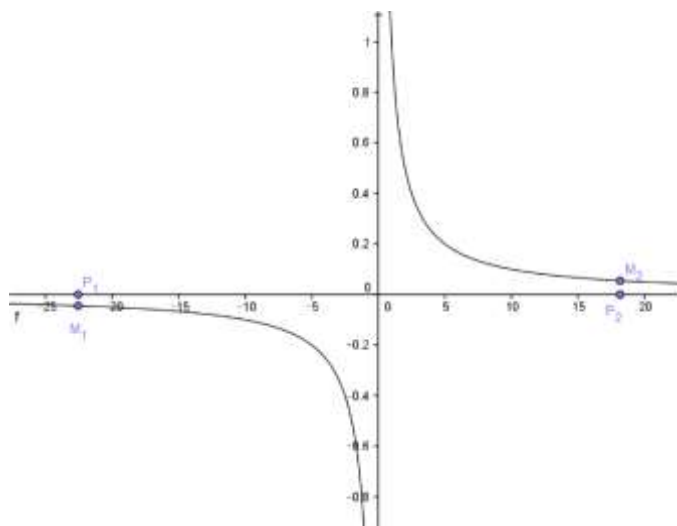
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = 0$$

d) Conséquences graphiques :

Lorsque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  on dira que la droite d'équation  $y = \ell$  est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$ .

Lorsque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$  on dira que la droite d'équation  $y = \ell$  est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de  $f$  en  $-\infty$ .

Cela signifie que si un point  $M(x; f(x))$  appartient à la courbe représentative de  $f$  et si  $P(x; \ell)$  est un point de la droite  $y = \ell$  alors la distance  $MP$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ou vers  $-\infty$ .

Exemple avec la fonction inverse :

Méthode: Pour étudier la position relative de la courbe représentative de  $f$  par rapport à son asymptote d'équation  $y = \ell$ , on étudie le signe de la différence  $f(x) - \ell$ .

Si  $f(x) - \ell > 0$  la courbe sera au-dessus de l'asymptote.

Si  $f(x) - \ell < 0$  la courbe sera au-dessous de l'asymptote.

Pour la fonction inverse, l'asymptote est  $y = 0$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

$$f(x) - 0 = \frac{1}{x}.$$

Si  $x > 0$   $f(x) - 0 > 0$  donc la courbe est au-dessus de l'asymptote sur  $]0; +\infty[$

Si  $x < 0$   $f(x) - 0 < 0$  donc la courbe est au-dessous de l'asymptote sur  $] -\infty; 0[$

### III. Limite d'une fonction en une valeur finie a :

#### 1) La valeur finie a est aux extrémités et à l'extérieur du domaine de définition (valeur interdite) :

##### a) Définition :

□ Dire qu'une fonction  $f$  a pour limite  $+\infty$  comme limite en  $a$  par valeurs supérieures signifie que tout intervalle  $]A; +\infty[$  avec  $A$  un réel, contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez proche de  $a$  avec  $x > a$ . On notera alors  $\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) = +\infty$ . On dira aussi **limite à droite en a**.

□ Dire qu'une fonction  $f$  a pour limite  $-\infty$  comme limite en  $a$  par valeurs supérieures signifie que tout intervalle  $] -\infty; A[$  avec  $A$  un réel, contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez proche de  $a$  avec  $x > a$ . On notera alors  $\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) = -\infty$ .

□ Dire qu'une fonction  $f$  a pour limite  $+\infty$  comme limite en  $a$  par valeurs inférieures signifie que tout intervalle  $]A; +\infty[$  avec  $A$  un réel, contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez proche de  $a$  avec  $x < a$ . On notera alors  $\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x) = +\infty$ . On dira aussi **limite à gauche en a**.

□ Dire qu'une fonction  $f$  a pour limite  $-\infty$  comme limite en  $a$  par valeurs inférieures signifie que tout intervalle  $] -\infty; A[$  avec  $A$  un réel, contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez proche de  $a$  avec  $x < a$ . On notera alors  $\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x) = -\infty$ .

##### b) Exemple de rédaction avec la fonction inverse :

##### ➤ Pour la limite en 0 par valeurs supérieures :

On choisit un intervalle  $]A; +\infty[$  avec  $A$  un réel positif.

On cherche alors  $x > 0$  tel que  $f(x) > A$ .

$$f(x) > A \Leftrightarrow \frac{1}{x} > A \text{ donc } x < \frac{1}{A}$$

donc si  $0 < x < \frac{1}{A}$  toutes les valeurs de  $f(x)$  sont dans l'intervalle  $]A; +\infty[$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

##### ➤ Pour la limite en 0 par valeurs inférieures :

On choisit un intervalle  $] -\infty; A[$  avec  $A$  un réel négatif.

On cherche alors  $x < 0$  tel que  $f(x) < A$ .

$$f(x) < A \Leftrightarrow \frac{1}{x} < A \text{ donc } 0 > x > \frac{1}{A}$$

donc si  $\frac{1}{A} < x < 0$  toutes les valeurs de  $f(x)$  sont dans l'intervalle  $] -\infty; A[$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

##### c) Limites de référence :

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{1}{x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\text{si } n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{1}{x^n} = -\infty \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

##### d) Conséquences graphiques :

Si  $f(x)$  admet pour limite  $+\infty$  ou  $-\infty$  en  $a$  (à droite ou à gauche) on dira que la droite verticale d'équation  $x = a$  est **asymptote verticale** à la courbe représentative de  $f$  en  $a$ .

#### 2) La valeur finie a est à l'intérieur du domaine de définition :

Dans ce cas, la recherche d'une limite est dénuée de tout intérêt.

Si  $a$  est une valeur du domaine de définition, on posera  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

#### IV. Opérations sur les limites :

Pour calculer une limite d'une fonction, on peut utiliser les définitions (avec les intervalles), mais c'est long et peu pratique ; donc on préfère utiliser les limites des fonctions de référence, les opérations à partir de ces fonctions de référence et les techniques de comparaison  
a représente soit un réel , soit  $+\infty$  , soit  $-\infty$  .

##### 1) Somme de deux fonctions :

| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$<br>=<br>$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$ | $\ell' \in \mathbb{R}$ | $-\infty$  | $+\infty$  |
|-----------------------------------------------------------------------|------------------------|------------|------------|
| $\ell \in \mathbb{R}$                                                 | $\ell + \ell'$         | $-\infty$  | $+\infty$  |
| $-\infty$                                                             | $-\infty$              | $-\infty$  | <b>F.I</b> |
| $+\infty$                                                             | $+\infty$              | <b>F.I</b> | $+\infty$  |

##### 2) Produit de deux fonctions :

| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$<br>=<br>$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$ | $\ell' \in \mathbb{R}$<br>$\ell' \neq 0$             | $-\infty$                                          | $+\infty$                                          | 0          |
|-----------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|------------|
| $\ell \in \mathbb{R}$<br>$\ell \neq 0$                                | $\ell \times \ell'$                                  | $-\infty$ si $\ell > 0$<br>$+\infty$ si $\ell < 0$ | $+\infty$ si $\ell > 0$<br>$-\infty$ si $\ell < 0$ | 0          |
| $-\infty$                                                             | $-\infty$ si $\ell' > 0$<br>$+\infty$ si $\ell' < 0$ | $+\infty$                                          | $-\infty$                                          | <b>F.I</b> |
| $+\infty$                                                             | $+\infty$ si $\ell' > 0$<br>$-\infty$ si $\ell' < 0$ | $-\infty$                                          | $+\infty$                                          | <b>F.I</b> |
| 0                                                                     | 0                                                    | <b>F.I</b>                                         | <b>F.I</b>                                         | 0          |

##### 3) Inverse d'une fonction :

| $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$                        | $\ell \in \mathbb{R}$<br>$\ell \neq 0$ | $-\infty$ | $+\infty$ | 0                                                  |
|--------------------------------------------------------|----------------------------------------|-----------|-----------|----------------------------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) =$ | $\frac{1}{\ell}$                       | 0         | 0         | $+\infty$ si $f(x) > 0$<br>$-\infty$ si $f(x) < 0$ |

##### 4) Quotient de deux fonctions : $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ .

| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$<br>=<br>$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$ | $\ell' \in \mathbb{R}$<br>$\ell' \neq 0$             | $-\infty$                                  | $+\infty$                                  | 0                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| $\ell \in \mathbb{R}$<br>$\ell \neq 0$                                | $\frac{\ell}{\ell'}$                                 | $0^-$ si $\ell > 0$<br>$0^+$ si $\ell < 0$ | $0^+$ si $\ell > 0$<br>$0^-$ si $\ell < 0$ | $+\infty$ si $\ell' > 0$<br>$-\infty$ si $\ell' < 0$ |
| $-\infty$                                                             | $-\infty$ si $\ell' > 0$<br>$+\infty$ si $\ell' < 0$ | <b>F.I</b>                                 | <b>F.I</b>                                 | $-\infty$ si $g(x) > 0$<br>$+\infty$ si $g(x) < 0$   |
| $+\infty$                                                             | $+\infty$ si $\ell' > 0$<br>$-\infty$ si $\ell' < 0$ | <b>F.I</b>                                 | <b>F.I</b>                                 | $-\infty$ si $g(x) < 0$<br>$+\infty$ si $g(x) > 0$   |
| 0                                                                     | 0                                                    | 0                                          | 0                                          | <b>F.I</b>                                           |

##### 5) Formes indéterminées :

$$+\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}$$

## 6) Limites d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ :

Pour lever une indétermination, on factorise le terme de plus haut degré.

Exemple : Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4$

$$5x^3 - 2x^2 + 4 = 5x^3 \left( 1 - \frac{2}{5x} + \frac{4}{5x^3} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{5x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{5x^3} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{5x} + \frac{4}{5x^3} = 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Par produit} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 \left( 1 - \frac{2}{5x} + \frac{4}{5x^3} \right) = +\infty \\ \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4 = +\infty \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{De même} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{2}{5x} + \frac{4}{5x^3} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 = -\infty \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Par produit} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 \left( 1 - \frac{2}{5x} + \frac{4}{5x^3} \right) = -\infty \\ \text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4 = -\infty \end{array} \right.$$

**Théorème :** La limite d'une fonction polynôme en l'infini est la limite de son terme de plus haut degré.

$$\text{Rédaction : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 - 2x^2 + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 = -\infty$$

## 7) Limite d'une fonction rationnelle :

Exemples : Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{4x + 5}$  pour  $x \neq -\frac{5}{4}$

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{4x + 5} = \frac{2x \left( x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2x} \right)}{2x \left( 2 + \frac{5}{2x} \right)} = \frac{x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2x}}{2 + \frac{5}{2x}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{3}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2x} = +\infty \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2x}}{2 + \frac{5}{2x}} = +\infty \\ \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{4x + 5} = +\infty \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{2x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{5}{2x} = 2 \end{array}$$

Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+1}{2x^2-3x+1}$  pour  $x \in D_f$  (à déterminer)

Domaine de définition :  $2x^2 - 3x + 1 \neq 0$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \quad x_1 = 1 ; x_2 = \frac{1}{2}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ 1 ; \frac{1}{2} \right\}$$

$$\frac{4x+1}{2x^2-3x+1} = \frac{2x \left( 2 + \frac{1}{2x} \right)}{2x \left( x - \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{2x} \right)} = \frac{2 + \frac{1}{2x}}{x - \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{2x}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{2x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{2x} = -\infty \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+1}{2x^2-3x+1} = 0 \end{array}$$

Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3-2x}{x+4}$  pour  $x \neq -4$

$$\frac{5x^3-2x}{x+4} = \frac{x(5x^2-2)}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)} = \frac{5x^2-2}{1+\frac{4}{x}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 - 2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{4}{x} = 1 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3-2x}{x+4} = +\infty \end{array}$$

**Théorème :** La limite d'une fonction rationnelle en l'infini est la limite du quotient simplifié des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Rédaction :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-3x+1}{4x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+1}{2x^2-3x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3-2x}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 = +\infty$$

## 8) Limite d'une fonction par comparaison :

On utilisera les mêmes théorèmes de comparaison que pour les suites.

### 9) Limite d'une fonction composée :

Une fonction composée est une fonction obtenue en enchainant les fonctions de référence.

Exemple :  $f(x) = e^{-2x+3}$ .

$f$  est une fonction composée d'une fonction affine  $g(x) = -2x + 3$  et d'une fonction exponentielle

$h(x) = e^x$ . On a  $f(x) = h(g(x))$

$$x \longrightarrow -2x + 3 \longrightarrow e^{-2x+3}$$

$$X \longrightarrow e^X$$

Pour étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$  par exemple, on étudie d'abord

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x + 3 = -\infty \quad \text{puis on calcule} \quad \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

#### Propriété admise :

Si  $a, b$  et  $c$  sont des réels finis ou des infinis

Si  $f, g$  et  $h$  sont des fonctions numériques réelles telles que  $f(x) = h(g(x))$

$$x \longrightarrow g(x) \longrightarrow h(g(x)) = f(x)$$

$$X \longrightarrow h(X)$$

Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$  et  $\lim_{X \rightarrow b} h(X) = c$  Alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(g(x)) = c$

Exemples : Déterminer la limite de  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$  en  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$$

$$X = x^2 - 4$$

Déterminer la limite de  $f_2(x) = \left(3 - \frac{2}{x}\right)^2$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{2}{x} = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} X^2 = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{2}{x}\right)^2 = 9$$

$$X = 3 - \frac{2}{x}$$

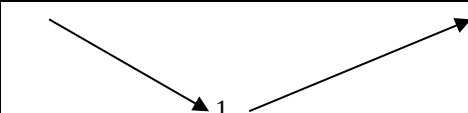
## V. Limites et fonction exponentielle :

### 1) Limite en $+\infty$ :

Pour montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  on utilise le théorème de comparaison.

On va étudier la fonction  $g(x) = e^x - x$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$g'(x) = e^x - 1 \quad g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

|         |                                                                                   |     |           |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$                                                                         | $0$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | $-$                                                                               | $0$ | $+$       |
| $g(x)$  |  |     |           |

Le minimum de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  est  $g(0) = 1$ .

donc  $g(x) \geq 1 > 0$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$

donc  $e^x > x$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  donc par comparaison

### 2) Limite en $-\infty$ :

Pour montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  on utilise un changement de variable.

On pose  $X = -x$  donc  $x = -X$ . Donc quand  $x$  tend vers  $-\infty$ ,  $X$  tend vers  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0.$$

On peut également en déduire que **la courbe de la fonction exponentielle admet la droite  $y = 0$  comme asymptote en  $-\infty$ .**

### 3) Limite et nombre dérivé :

On sait que le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 vaut  $(\exp)'(0) = e^0 = 1$ .

$$\text{Donc on a } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(0+h) - \exp(0)}{h} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

### 4) Croissance comparée de $x$ et $e^x$ :

a) en  $+\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

On étudie la fonction  $h$  définie par  $h(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$  sur  $[0; +\infty[$ .

$h'(x) = e^x - x = g(x)$  du 1). On a vu que  $g(x) > 0$  donc  $h'(x) > 0$   
donc  $h$  strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

$h(0) = 1$  donc  $h(x) \geq 1 > 0$  pour  $x \geq 0$  donc  $e^x > \frac{1}{2}x^2$  pour  $x \geq 0$ .

Si  $x > 0$  on a  $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{2}x$ . Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

On peut également en déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$

b) en  $-\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

Il suffit de poser  $X = -x$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -X e^{-X} = -\left(\lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X}\right) = 0$ .

On dit parfois que l'exponentielle l'emporte sur les puissances ( $x, x^2, \dots$ ).

## VI. Etude complète d'une fonction :

Exemple : Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .
- 2) Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- 3) Montrer que pour  $x \neq 1$  on a :  $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x - 1}$
- 4) Calculer la limite de  $f$  en 1. Que peut-on en déduire pour  $(\mathcal{C}_f)$  ?
- 5) Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- 6) Calculer l'équation de la tangente à  $(\mathcal{C}_f)$  au point A d'abscisse 0.
- 7) Tracer  $(\mathcal{C}_f)$  ainsi que les asymptotes éventuelles et la tangente déterminée en 6).

1)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$

3)  $2x + 1 + \frac{1}{x - 1} = \frac{(2x + 1)(x - 1) + 1}{x - 1} = \frac{2x^2 - x}{x - 1} = f(x)$

4)

|                                                                                                                                      |   |                                                                |                                                                                                                                      |   |                                                                |                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} 2x^2 - x = 1$<br>$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} x - 1 = 0^-$<br>car $x < 1 \Leftrightarrow x - 1 < 0$ | } | par quotient<br>$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = -\infty$ | $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} 2x^2 - x = 1$<br>$\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} x - 1 = 0^+$<br>car $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$ | } | par quotient<br>$\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) = +\infty$ | On en déduit donc que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$ . |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|

5)  $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$  donc  $f'(x) = \frac{(4x - 1)(x - 1) - (2x^2 - x) \times 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x - 1)^2}$   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$  ou  $x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

| $x$     | $-\infty$ | $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ | 1         | $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|--------------------------|-----------|--------------------------|-----------|
| $f'(x)$ |           | +                        | 0         | -                        |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $3 - 2\sqrt{2}$          | $-\infty$ | $+\infty$                | $+\infty$ |

6) La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$  soit  $y = x$ .

7)

