

@ pour les tiers temps question à ne pas faire**Exercice 1 :***(11 points)*

1) Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle I données :

a) $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - x + 6$ sur $I = \mathbb{R}$

b) $g(x) = \frac{8x+6}{(2x^2+3x+5)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$

① $h(x) = -\frac{8}{\sqrt{2x+5}}$ sur $I =]-\frac{5}{2}; +\infty[$

d) $l(x) = 2 \cos(3x + 5)$ sur $I = \mathbb{R}$

2) Déterminer la primitive qui vérifie la condition donnée :

a) $m(x) = 2(3x + 5)^2$ sur $I = \mathbb{R}$ avec M primitive de m telle que $M(0) = 1$

b) $p(x) = 3xe^{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$ avec P primitive de p telle que $P(1) = 2$

① $t(x) = \frac{6x+1}{3x^2+x+5}$ sur $I = \mathbb{R}$ avec T primitive de t telle que $T(1) = 9$

Exercice 2 :*(5,5 points)*On a l'équation différentielle suivante : (E) $y' = \frac{y}{4} + 2x - 1$.1) Déterminer une solution particulière g de la forme : $g(x) = mx + p$.2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle (E₁): $y' = \frac{y}{4}$.

3) En déduire les solutions générales de (E).

①4) Déterminer la solution h telle que : $h(0) = 1$.**Exercice 3 :***(7 points)*

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225°C.

On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four. On admet que l'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.Dans cette modélisation, f(t) représente la température en degrés Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four. Ainsi, f(0,5) représente la température de la baguette une demi-heure après la sortie du four. Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25°C. On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1) a) Préciser la valeur de f(0).

b) Résoudre l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.c) En déduire que pour tout réel $t \geq 0$, on a $f(t) = 200 e^{-6t} + 25$.

2) Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :

➤ décroît

➤ tend à se stabiliser à la température ambiante.

La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?

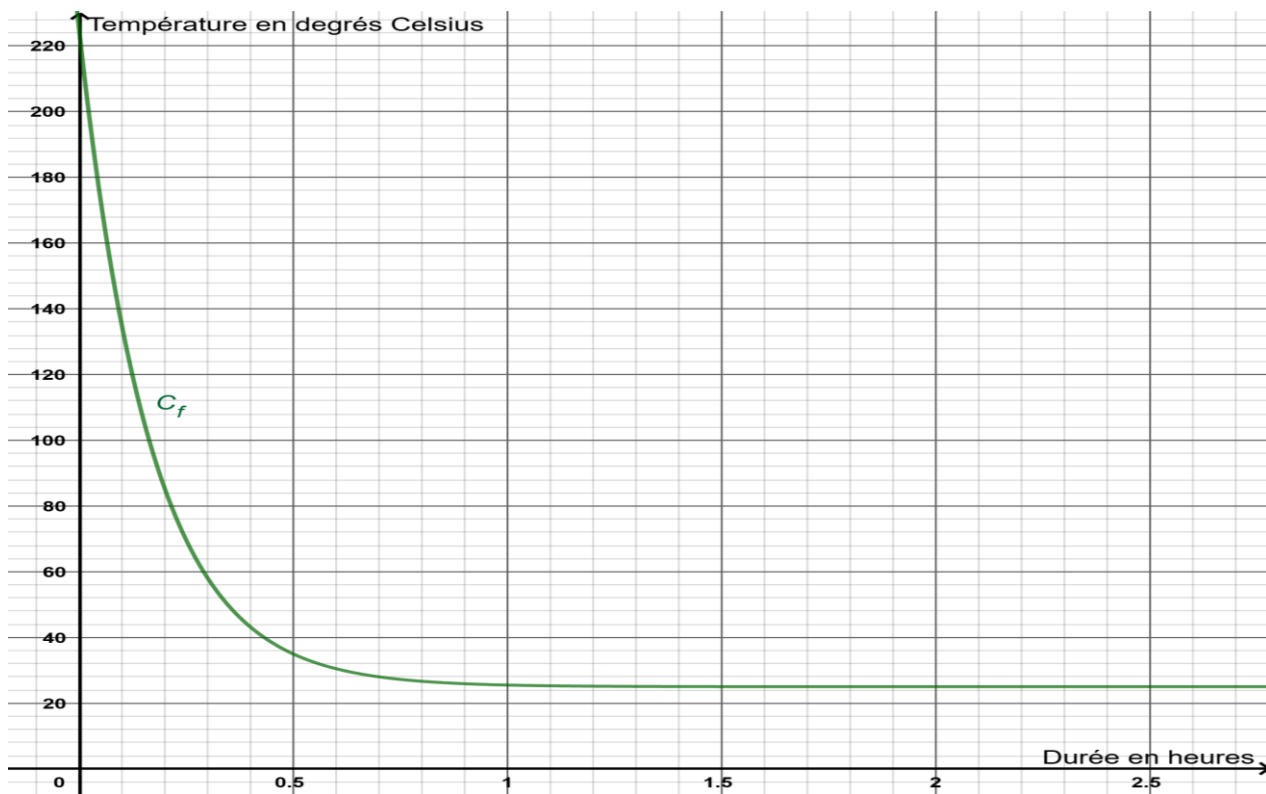
3) Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40°C.

On note τ_0 le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.

On donne sur la page suivante, la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.

①4) Avec la précision permise par le graphique, lire τ_0 . On donnera une valeur approchée de τ_0 sous forme d'un nombre entier de minutes.



Exercice 4 :

(16,5 points)

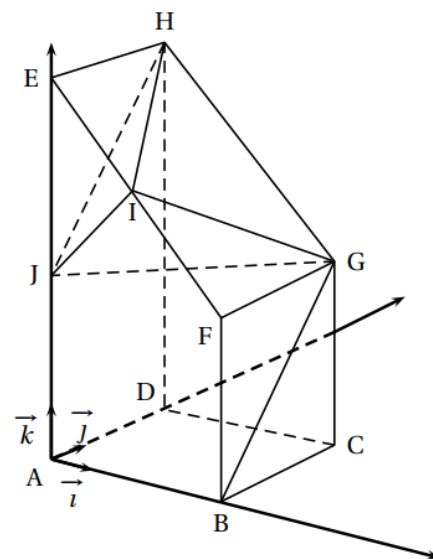
On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE, trapèze rectangle en A.

On associe à ce prisme le repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que :

$$\vec{i} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}; \quad \vec{j} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AD}; \quad \vec{k} = \frac{1}{8} \overrightarrow{AE}.$$

De plus on a $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AE}$.

On note I le milieu de [EF] et J le milieu de [AE].



1) Donner les coordonnées des points I et J.

2) Soit \vec{n} le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que le vecteur \vec{n} est un vecteur normal au plan (IGJ).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (IGJ).

3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d), perpendiculaire au plan (IGJ) et passant par le point H.

4) On note L le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ).

Montrer que les coordonnées de L sont $\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{16}{3}\right)$.

5) Calculer la distance du point H au plan (IGJ).

@6) Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.

@7) En déduire le volume du tétraèdre IGJH.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$.

Correction DS7:

Exercice 1 :

(11 points)

1) Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle I données :

a) $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - x + 6$ sur $I = \mathbb{R}$

Sur $I = \mathbb{R}$, $F(x) = -\frac{x^4}{2} + 4 \times \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x + C, C \in \mathbb{R}$

b) $g(x) = \frac{8x+6}{(2x^2+3x+5)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$

Sur $I = \mathbb{R}$, $G(x) = -\frac{2}{2x^2+3x+5} + C, C \in \mathbb{R}$

c) $h(x) = -\frac{8}{\sqrt{2x+5}}$ sur $I =]-\frac{5}{2}; +\infty[$

Sur $I =]-\frac{5}{2}; +\infty[, H(x) = -4 \times 2\sqrt{2x+5} + C = -8\sqrt{2x+5} + C, C \in \mathbb{R}$

d) $l(x) = 2 \cos(3x+5)$ sur $I = \mathbb{R}$

Sur $I = \mathbb{R}$, $L(x) = \frac{2}{3} \sin(3x+5) + C, C \in \mathbb{R}$

2) Déterminer la primitive qui vérifie la condition donnée :

a) $m(x) = 2(3x+5)^2$ sur $I = \mathbb{R}$ avec M primitive de m telle que $M(0) = 1$

Sur $I = \mathbb{R}$, $M(x) = \frac{2}{3} \times \frac{(3x+5)^3}{3} + C$

De plus $M(0) = \frac{2}{3} \times \frac{(3 \times 0 + 5)^3}{3} + C = \frac{250}{9} + C = 1$

Donc $C = 1 - \frac{250}{9} = -\frac{241}{9}$ d'où $M(x) = \frac{2}{3} \times \frac{(3x+5)^3}{3} - \frac{241}{9} = 2 \times \frac{(3x+5)^3}{9} - \frac{241}{9}$

b) $p(x) = 3xe^{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$ avec P primitive de p telle que $P(1) = 2$

Sur $I = \mathbb{R}$, $P(x) = \frac{3}{2} \times e^{x^2} + C$

De plus $P(1) = \frac{3}{2}e^{1^2} + C = \frac{3}{2}e + C = 2$

Donc $C = 2 - \frac{3}{2}e$ d'où $P(x) = \frac{3}{2}e^{x^2} + 2 - \frac{3}{2}e$

c) $t(x) = \frac{6x+1}{3x^2+x+5}$ sur $I = \mathbb{R}$ avec T primitive de t telle que $T(1) = 9$

Sur $I = \mathbb{R}$, $T(x) = \ln(3x^2 + x + 5) + C$ car on a : Pour tout x réel, $3x^2 + x + 5 > 0$

De plus $T(1) = \ln(3 \times 1^2 + 1 + 5) + C = \ln(9) + C = 9$

Donc $C = 9 - \ln(9)$ d'où $T(x) = \ln(3x^2 + x + 5) + 9 - \ln(9) = \ln\left(\frac{3x^2+x+5}{9}\right) + 9$

Exercice 2 :

(5,5 points)

On a l'équation différentielle suivante : (E) $y' = \frac{y}{4} + 2x - 1$.

1) Déterminer une solution particulière g de la forme : $g(x) = mx + p$.

On a : $g(x) = mx + p$ donc $g'(x) = m$ donc en remplaçant dans (E) on a :

$$m = \frac{mx+p}{4} + 2x - 1 \Leftrightarrow 4m = mx + p + 8x - 4 \Leftrightarrow (m-8)x + p - 4 - 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-8=0 \\ p-4-4m=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=8 \\ p=36 \end{cases}$$

Donc $g(x) = 8x + 36$

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle (E₁): $y' = \frac{y}{4}$.

On a une équation du type $y' = ay$ avec $a = \frac{1}{4}$

Donc les solutions sont : $y(x) = Ce^{\frac{x}{4}}$ avec C réel

3) En déduire les solutions générales de (E).

Pour avoir les solutions générales, on fait la somme des solutions et d'une solution particulière,

Donc $h(x) = Ce^{\frac{x}{4}} + 8x + 36, C$ réel.

4) Déterminer la solution h telle que : $h(0) = 1$.

On a : $h(0) = Ce^{\frac{0}{4}} + 8 \times 0 + 36 = C + 36 = 1$ donc $C = 1 - 36 = -35$

Donc pour tout x réel, $h(x) = -35e^{\frac{x}{4}} + 8x + 36$

Exercice 3 :

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C.

On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.

On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t , exprimée en heure, après la sortie du four.

Ainsi, $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.

Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C.

On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1. a. $f(0)$ représente la température d'une baguette lors de sa sortie du four, c'est-à-dire 225 °C.
- b. Pour résoudre l'équation, on la met sous la forme $y' = ay + b$ avec a et b des réels. On obtient :

$$y' = -6y + 150 \Leftrightarrow y' = ay + b \text{ avec } \begin{cases} a = -6 \\ b = 150 \end{cases}$$

On sait alors que les solutions de cette équation sont toutes les fonctions de la forme :

$$f(t) = -\frac{b}{a} + Ce^{at}, C \in \mathbb{R}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$f(t) = -\frac{150}{-6} + Ce^{-6t}$$

$$f(t) = 25 + Ce^{-6t}$$

- c. La solution de l'équation différentielle a été obtenue en question b. Il reste à exploiter la condition initiale $f(t = 0) = f(0) = 225$ d'après la valeur trouvée à la question a. La fonction qui satisfait donc le modèle de l'exercice est la solution de l'équation :

$$\begin{aligned} f(0) = 225 &\iff C e^0 + 25 = 225 \\ &\iff C + 25 = 225 \\ &\iff C = 200 \end{aligned}$$

Donc on a bien, pour tout réel $t \geq 0$:

$$f(t) = 200 e^{-6t} + 25$$

2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four décroît et tend à se stabiliser à la température ambiante.

— Vérifions d'abord que la fonction f décroît. f est d'abord bien dérivable pour tout réel $t \geq 0$ comme composée de fonctions dérivables et :

$$\text{pour tout réel } t \geq 0, f'(t) = -1200 e^{-6t}$$

Or, pour tout réel $t \geq 0$:

$$\begin{cases} e^{-6t} > 0 \\ -1200 < 0 \end{cases} \implies f'(t) < 0 \implies f \text{ est bien décroissante (strictement).}$$

— Pour vérifier que la température tend à se stabiliser à la température ambiante (25°C), nous allons calculer la limite de la fonction f en $+\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-6t} = 0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} 200 e^{-6t} = 0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} 200 e^{-6t} + 25 = 25 = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t).$$

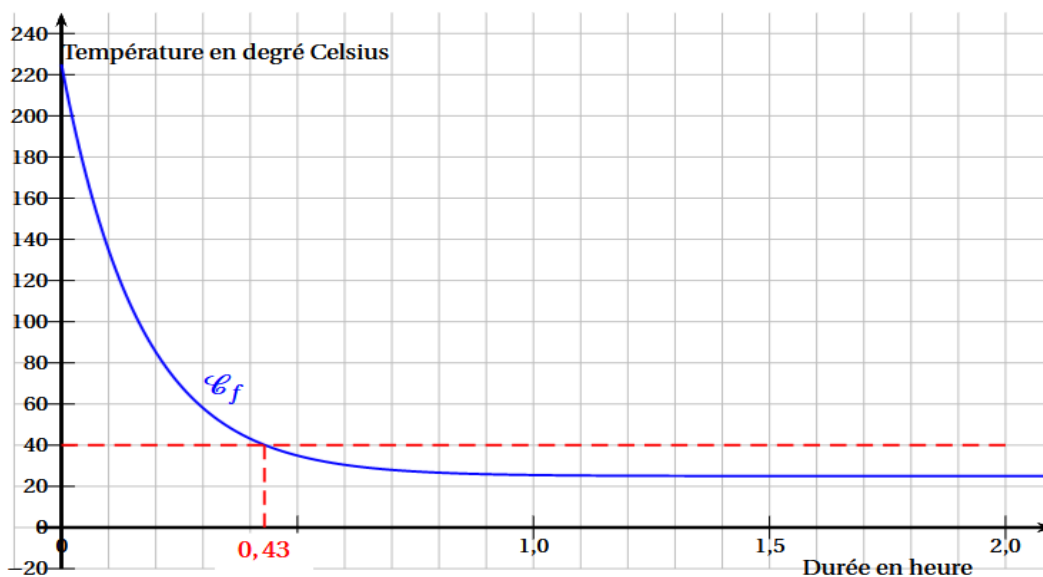
La fonction f , qui représente la température de la baguette (en $^\circ\text{C}$) au bout du temps, a pour limite 25 en $+\infty$. Cela signifie donc bien que la température tend à se stabiliser à la température ambiante de 25°C .

Donc la fonction f fournit un modèle en accord avec ces observations.

3. La fonction f est continue et décroissante strictement donc monotone sur $[0 : +\infty[$. Par ailleurs, $f(0) = 225$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 25$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique élément $c \in [0 : +\infty[$ tel que $f(c) = 40$.

Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40°C . On note \mathcal{T}_0 le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.

On donne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.



4. La courbe \mathcal{C}_f semble atteindre 40 vers 0,43 heure soit $0,43 \times 60 = 25,8$ minutes. On trouve donc une valeur approchée de 26 minutes.

Exercice 4 :

1. Dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a les coordonnées suivantes pour les sommets du prisme droit :

$$A(0; 0; 0) \quad B(4; 0; 0) \quad C(4; 4; 0) \quad D(0; 4; 0)$$

$$E(0; 0; 8) \quad F(4; 0; 4) \quad G(4; 4; 4) \quad H(0; 4; 8)$$

I étant le milieu de [EF], on a $I\left(\frac{x_E + x_F}{2}; \frac{y_E + y_F}{2}; \frac{z_E + z_F}{2}\right)$, soit $I(2; 0; 6)$.

J étant le milieu de [AE], on a de même : $J(0; 0; 4)$.

2. a. Si le plan est nommé (IGJ), cela signifie que les trois points I, G et J définissent le plan, et donc sont non alignés.

$$\text{On a : } \overrightarrow{IG} \begin{pmatrix} x_G - x_I \\ y_G - y_I \\ z_G - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et de même : } \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Comme le repère est orthonormé, on peut calculer les produits scalaires à l'aide des coordonnées :

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IG} = -1 \times 2 + 1 \times 4 + 1 \times (-2) = -2 + 4 - 2 = 0$: \vec{n} est orthogonal à \overrightarrow{IG} .
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IJ} = -1 \times (-2) + 1 \times 0 + 1 \times (-2) = 2 + 0 - 2 = 0$: \vec{n} est orthogonal à \overrightarrow{IJ} .

Ainsi, \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IGJ) : c'est donc un vecteur normal au plan.

b. Une équation cartésienne d'un plan dont \vec{n} est un vecteur normal est de la forme : $-1 \times x + 1 \times y + 1 \times z + d = 0$, soit $-x + y + z + d = 0$, où d est un réel quelconque.

Comme G est un point du plan (IGJ), on en déduit que la constante d dans ce cas doit être telle que :

$$\begin{aligned} -x_G + y_G + z_G + d = 0 &\iff -4 + 4 + 4 + d = 0 \\ &\iff d = -4 \end{aligned}$$

Une équation de (IGJ) est donc : $-x + y + z - 4 = 0$.

3. Si d est perpendiculaire à (IGJ), alors elle est dirigée par \vec{n} , comme elle passe par H, elle admet

$$\text{comme représentation paramétrique : } \begin{cases} x = x_H + t x_{\vec{n}} \\ y = y_H + t y_{\vec{n}} \\ z = z_H + t z_{\vec{n}} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \text{ soit ici : } \begin{cases} x = -t \\ y = 4 + t \\ z = 8 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

4. Si L est le projeté orthogonal de H sur (IGJ), cela veut dire que la droite (HL) est orthogonale au plan (et passe par H), et donc que la droite (HL) est la droite d . Comme L est un point du plan, c'est donc le seul point de d sur le plan.

Cherchons le paramètre t tel qu'un point M_t de paramètre t dans la représentation de d soit un point de (IGJ) :

$$\begin{aligned} M_t \in (\text{IGJ}) &\iff -x_{M_t} + y_{M_t} + z_{M_t} - 4 = 0 \\ &\iff -(-t) + (4 + t) + (8 + t) - 4 = 0 \\ &\iff 3t + 8 = 0 \\ &\iff t = \frac{-8}{3} \end{aligned}$$

L est donc $M_{\frac{-8}{3}}$ sur la droite d : il a donc comme coordonnées $L\left(-\frac{8}{3}; 4 + \frac{-8}{3}; 8 + \frac{-8}{3}\right)$.

Cela confirme $L\left(\frac{8}{3}; \frac{12-8}{3}; \frac{24-8}{3}\right)$

Autrement dit, le point L est bien le point de coordonnées $\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{16}{3}\right)$.

5. Par définition, la distance d'un point à un plan est la distance entre le point et son projeté orthogonal sur le plan, donc on cherche HL. Comme on travaille dans un repère orthonormé :

$$HL = \sqrt{(x_L - x_H)^2 + (y_L - y_H)^2 + (z_L - z_H)^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{192}{9}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

La distance de H au plan (IGJ) est donc de $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

6. Calculons : $\vec{IG} \cdot \vec{IJ} = 2 \times (-2) + 4 \times 0 + (-2) \times (-2) = -4 + 0 + 4 = 0$.

Les vecteurs \vec{IG} et \vec{IJ} sont donc orthogonaux (et non nuls) donc les droites qu'ils dirigent, (IG) et (IJ) sont orthogonales (et perpendiculaires, car sécantes en I) : le triangle IGJ est donc rectangle en I.

7. Pour calculer le volume, on choisira IGJ comme base (car le triangle étant rectangle, son aire est simple à calculer) et donc la hauteur correspondante est la distance du quatrième sommet (H) au plan (IGJ) (distance qui a été calculée à la question 5.).

$$IG = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$IJ = \sqrt{(-2)^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{L'aire du triangle IGJ est donc : } \mathcal{A}_{IGJ} = \frac{IG \times IJ}{2} = \frac{2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Le volume du tétraèdre est donc : } V = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{32}{3}.$$

Le volume du tétraèdre est de $V = \frac{32}{3}$ (soit environ 10,7, au dixième près).