PROBABILITES– ECHANTILLONNAGE

I. Petit historique des probabilités:

Le calcul des probabilités débuta véritablement au XVIIè siècle avec Pascal et Fermat puis Huygens et Bernoulli qui entreprirent l'étude de certains jeux de hasard.
Il s'est considérablement développé au XIXè siècle pour être appliqué aux Sciences Sociales (Economie) , aux Sciences Physiques (Thermodynamique).
C'est en 1933 que le Soviétique Kolmogorov en a donné une axiomatique cohérente.
Le fait que des événements se produisent au hasard n'implique pas une totale absence d'ordre.

Que permettent d'évaluer les probabilités ?

Les probabilités sont utiles pour généraliser des observations recueillies à partir de données statistiques.

Exemple : Une compagnie d'assurance ne pourra pas savoir lequel de ses clients aura un accident l'an prochain mais elle pourra dire que , à coup sûr , 5% de ses clients auront un accident ce qui permettra de fixer le montant des primes.

II. Le langage des probabilités:

Prenons l'exemple d'un jeu de dé : on lance un dé à six faces et on note le numéro porté par la face supérieure lors de son arrêt.

Le lancer du dé sera **l'expérience aléatoire.**

Après un lancer de dé on pourra obtenir 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
Ces six possibilités seront appelées **cas possibles** ou **éventualités** ou **issues**.

L'ensemble de tous les cas possibles ou de toutes les éventualités est appelé **l'univers.**
Il est souvent noté E ou Ω. Ici $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.

On appelle **événement** une partie ou un sous–ensemble de l'univers E.

L'événement " obtenir 2 " se limite a un seul cas possible. On dit que c'est un **événement élémentaire**.

L'événement " obtenir 4 ou 5 " est constitué de 2 éventualités. C'est le sous-ensemble $\{4 ; 5 \}$ de E .

L'événement " obtenir 7 " n'est constitué d'aucune éventualité. C'est le sous-ensemble vide de E .
On dira que c'est **l'événement impossible.**

L'événement "obtenir un nombre strictement inférieur à 7" est constitué par tous les éléments de E.
C'est l'univers E en entier. On dit que c'est **l'événement certain.**

III. Calcul de la probabilité d'un événement :

1) Probabilité d'un événement :

Chaque probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, exprimé en général sous forme de fraction (ou de nombre décimal si c'est possible).

La somme des probabilités de tous les événements élémentaires d'un univers fait 1.

$p(\varnothing) = 0$ La probabilité de l'événement impossible fait 0.

$p(E) = 1$ La probabilité de l'événement certain fait 1.

On définit une loi de probabilité de l'expérience aléatoire lorsque l'on donne les probabilités de chaque événement élémentaire.

Modéliser une expérience aléatoire, c'est définir l'univers E, les différentes issues, et une loi de probabilité sur E qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.

2) Calcul de la probabilité d'un événement :

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qu'il contient. On la note P(A).

Reprenons l'exemple du lancer de dé du II.
Si l'on calcule la probabilité d'obtenir un résultat inférieur strictement à 5 on a :

$A = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 \}$ $\qquad$ $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

3) Réunion et intersection d'événements :

$A \cap B$ ou « **A et B** », est l'événement constitué des issues qui sont à la fois dans A et dans B.
$A \cup B$ ou « **A ou B** », est l'événement constitué des issues qui sont dans l'un **au moins** des événements A et B.

Si A et B sont deux événements d'un univers E on a :
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exemple : Soit A l'événement " obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 " $A = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 \}$

Soit B l'événement " obtenir un résultat pair ". $B = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$

$A \cap B = \{ 2 ; 4 \}$ $\qquad$ $A \cup B = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 \}$

$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$

on a en effet $P(A \cup B) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

4) Les événements contraires :

L'événement contraire à l'événement A , noté $\overline{A}$, est l'ensemble de toutes les issues qui ne sont pas dans A**.**
On a alors $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = E$ et **$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.**

Exemple : Soit l'événement A " obtenir un multiple de 3 " $A = \{ 3 ; 6 \}$

L'événement contraire de A , noté $\overline{A}$,sera : " ne pas obtenir un multiple de 3 "

$\overline{A} = \{ 1 ; 2 ; 4 ; 5 \}$

$A \cup \overline{A} = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$

On dit que $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E.

$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(\overline{A}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ donc $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

5) Les événements incompatibles :

Si A et B sont deux évènements tels que $A \cap B = \varnothing$ on dira que **A et B sont incompatibles**.

6) Loi équirépartie. Equiprobabilité :

Si tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit que **les issues sont équiprobables ou qu'il y a équiprobabilité.**

Dans ce cas, **chaque probabilité est égale à $\frac{1}{n}$ avec n le nombre d'élément de E.**

On a alors pour tout événement A :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de E}} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Si un dé est pipé ou truqué , les événements élémentaires n'ont plus alors la même probabilité.

Exercice : Un dé a été truqué de telle sorte que la probabilité de sortie du 6 soit le triple de la probabilité de sortie du 1.Les numéros 1 ,2 ,3 ,4 et 5 ont la même probabilité de sortie.

1) Calculer la probabilité de sortie de chaque numéro.

$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$

$P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(1)$ et $P(6) = 3\,P(1)$

donc on a $P(1) + P(1) + P(1) + P(1) + P(1) + 3P(1) = 1$

$8\,P(1) = 1$

$P(1) = \frac{1}{8}$

donc $P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(1) = \frac{1}{8}$ et $P(6) = \frac{3}{8}$

2) Calculer la probabilité de l'événement A : " obtenir un numéro pair ".

$A = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$ $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

7) Résolution des problèmes liés aux probabilités :

Importance du choix de l'univers :

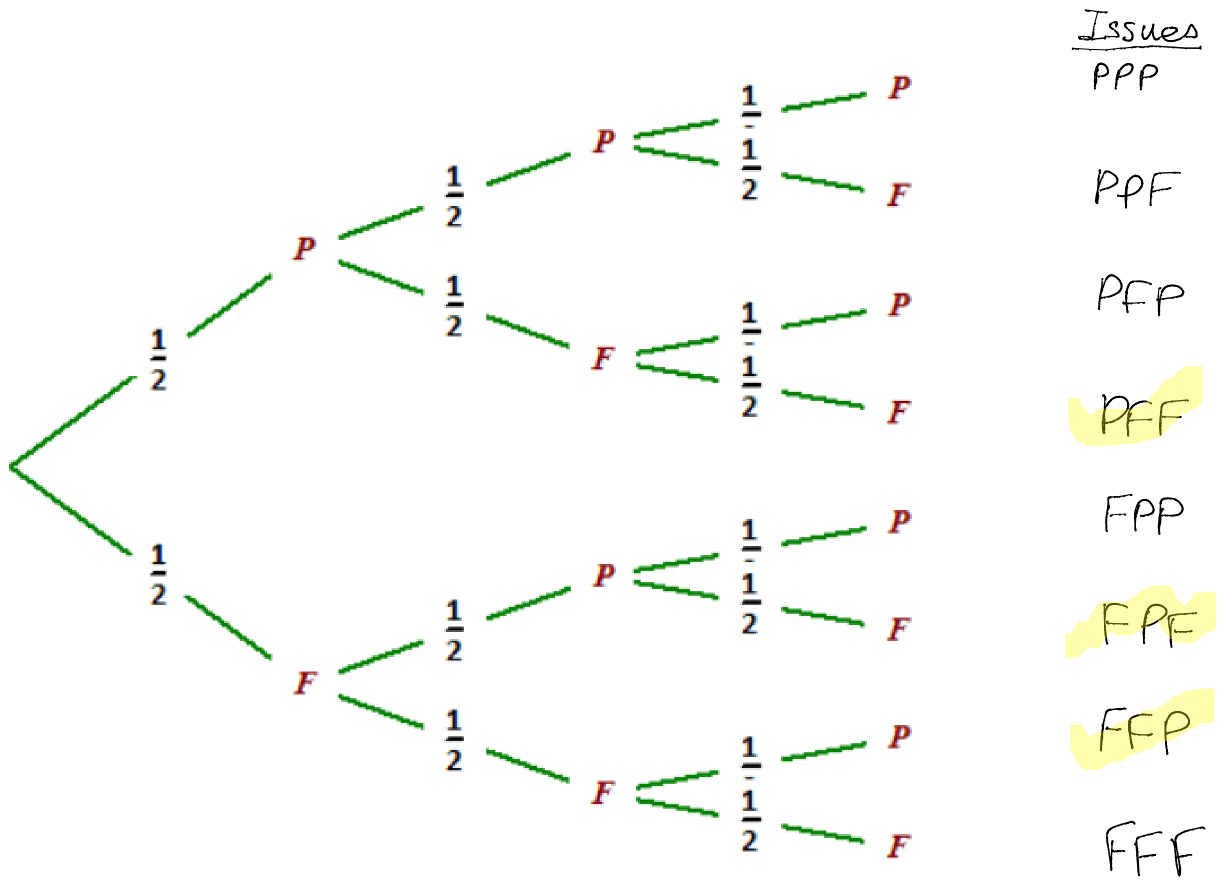
Les calculs seront grandement facilités si l'on peut faire le choix d'un univers où tous les événements élémentaires sont équiprobables.

Présentation et rédaction :

On utilisera, pour déterminer les probabilités demandées dans un exercice,

- **soit un arbre**

Exercice : Examinons le classique jeu de " pile ou face ".
On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.
Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois " face " exactement sur les trois résultats ?



Toutes les issues sont équiprobables (elles ont la même probabilité de se produire).
Il y en a 8. Trois seulement correspondent à " exactement deux fois face ".

Donc la probabilité de cet événement est $\frac{3}{8}$.

ATTENTION , ce raisonnement n'est valable qu'en cas d'équiprobabilité !

On peut aussi faire le calcul suivant (méthode valable dans tous les cas) :

$P(PFF) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$; $P(FPF) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$; $P(FFP) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

La probabilité cherchée est la somme de ces 3 probabilités : $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.