

# PROBABILITES– ECHANTILLONNAGE

## I. Petit historique des probabilités:

Le calcul des probabilités débuta véritablement au XVII<sup>e</sup> siècle avec Pascal et Fermat puis Huygens et Bernoulli qui entreprirent l'étude de certains jeux de hasard.

Il s'est considérablement développé au XIX<sup>e</sup> siècle pour être appliqué aux Sciences Sociales ( Economie ), aux Sciences Physiques (Thermodynamique ).

C'est en 1933 que le Soviétique Kolmogorov en a donné une axiomatique cohérente.

Le fait que des événements se produisent au hasard n'implique pas une totale absence d'ordre.

### **Que permettent d'évaluer les probabilités ?**

Les probabilités sont utiles pour généraliser des observations recueillies à partir de données statistiques.

Exemple : Une compagnie d'assurance ne pourra pas savoir lequel de ses clients aura un accident l'an prochain mais elle pourra dire que, à coup sûr, 5% de ses clients auront un accident ce qui permettra de fixer le montant des primes.

## II. Le langage des probabilités:

Prenons l'exemple d'un jeu de dé : on lance un dé à six faces et on note le numéro porté par la face supérieure lors de son arrêt.

Le lancer du dé sera **l'expérience aléatoire**.

Après un lancer de dé on pourra obtenir 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

Ces six possibilités seront appelées **cas possibles** ou **éventualités** ou **issues**.

L'ensemble de tous les cas possibles ou de toutes les éventualités est appelé **l'univers**.

Il est souvent noté E ou  $\Omega$ . Ici  $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$ .

On appelle **événement** une partie ou un sous-ensemble de l'univers E.

L'événement " obtenir 2 " se limite à un seul cas possible. On dit que c'est un **événement élémentaire**.

L'événement " obtenir 4 ou 5 " est constitué de 2 éventualités. C'est le sous-ensemble  $\{4 ; 5 \}$  de E .

L'événement " obtenir 7 " n'est constitué d'aucune éventualité. C'est le sous-ensemble vide de E .

On dira que c'est **l'événement impossible**.

L'événement "obtenir un nombre strictement inférieur à 7" est constitué par tous les éléments de E.

C'est l'univers E en entier. On dit que c'est **l'événement certain**.

## III. Calcul de la probabilité d'un événement :

### 1) Probabilité d'un événement :

**Chaque probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, exprimé en général sous forme de fraction (ou de nombre décimal si c'est possible ).**

**La somme des probabilités de tous les événements élémentaires d'un univers fait 1.**

**$p(\emptyset) = 0$  La probabilité de l'événement impossible fait 0.**

**$p(E) = 1$  La probabilité de l'événement certain fait 1.**

**On définit une loi de probabilité de l'expérience aléatoire lorsque l'on donne les probabilités de chaque événement élémentaire.**

**Modéliser une expérience aléatoire**, c'est définir l'univers E, les différentes issues, et une loi de probabilité sur E qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.

## 2) Calcul de la probabilité d'un événement :

**La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qu'il contient. On la note P(A).**

Reprenons l'exemple du lancer de dé du II.

Si l'on calcule la probabilité d'obtenir un résultat inférieur strictement à 5 on a :

$$A = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 \} \qquad P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

## 3) Réunion et intersection d'événements :

$A \cap B$  ou « **A et B** », est l'événement constitué des issues qui sont à la fois dans A et dans B.

$A \cup B$  ou « **A ou B** », est l'événement constitué des issues qui sont dans l'un **au moins** des événements A et B.

**Si A et B sont deux événements d'un univers E on a :**

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Exemple : Soit A l'événement " obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 "  $A = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 \}$

Soit B l'événement " obtenir un résultat pair ".  $B = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$

$$A \cap B = \{ 2 ; 4 \} \qquad A \cup B = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 \}$$

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad ; \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad ; \quad P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

$$\text{on a en effet } P(A \cup B) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

## 4) Les événements contraires :

**L'événement contraire à l'événement A , noté  $\bar{A}$  , est l'ensemble de toutes les issues qui ne sont pas dans A.**

On a alors  $A \cap \bar{A} = \emptyset$  et  $A \cup \bar{A} = E$  et  **$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .**

Exemple : Soit l'événement A " obtenir un multiple de 3 "  $A = \{ 3 ; 6 \}$

L'événement contraire de A , noté  $\bar{A}$  , sera : " ne pas obtenir un multiple de 3 "

$$\bar{A} = \{ 1 ; 2 ; 4 ; 5 \}$$

$$A \cup \bar{A} = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \} \qquad ; \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

On dit que  $\bar{A}$  est le **complémentaire** de A dans E.

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad ; \quad P(\bar{A}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad \text{donc} \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

## 5) Les événements incompatibles :

Si A et B sont deux évènements tels que  $A \cap B = \emptyset$  on dira que **A et B sont incompatibles.**

## 6) Loi équirépartie. Equiprobabilité :

Si tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit que **les issues sont équiprobables ou qu'il y a équiprobabilité.**

Dans ce cas, **chaque probabilité est égale à  $\frac{1}{n}$  avec n le nombre d'éléments de E.**

On a alors pour tout événement A :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de E}} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Si un dé est pipé ou truqué, les événements élémentaires n'ont plus alors la même probabilité.

Exercice : Un dé a été truqué de telle sorte que la probabilité de sortie du 6 soit le triple de la probabilité de sortie du 1. Les numéros 1, 2, 3, 4 et 5 ont la même probabilité de sortie.

1) Calculer la probabilité de sortie de chaque numéro.

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(1) \text{ et } P(6) = 3P(1)$$

$$\text{donc on a } P(1) + P(1) + P(1) + P(1) + P(1) + 3P(1) = 1$$

$$8P(1) = 1$$

$$P(1) = \frac{1}{8}$$

$$\text{donc } P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(1) = \frac{1}{8} \text{ et } P(6) = \frac{3}{8}$$

2) Calculer la probabilité de l'événement A : " obtenir un numéro pair ".

$$A = \{ 2 ; 4 ; 6 \} \quad P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

## 7) Résolution des problèmes liés aux probabilités :

### Importance du choix de l'univers :

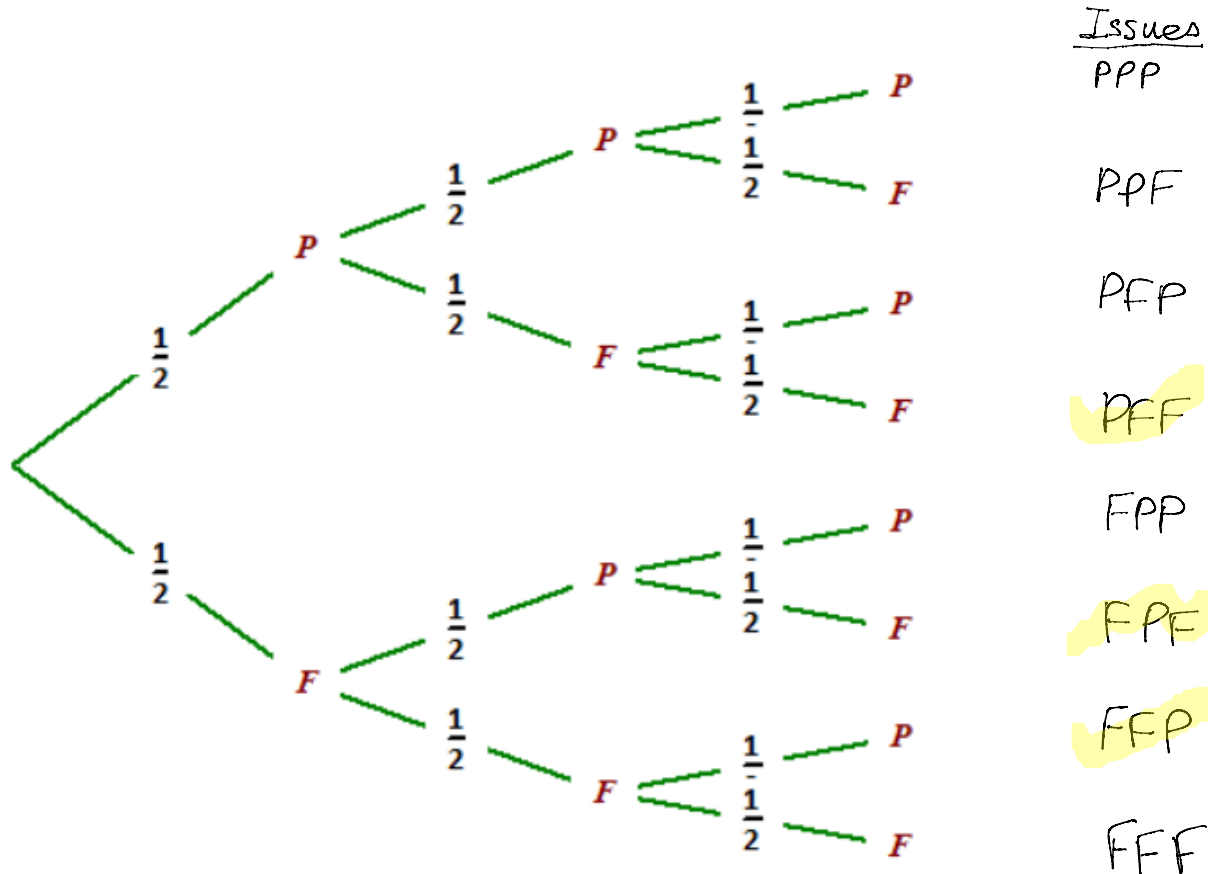
Les calculs seront grandement facilités si l'on peut faire le choix d'un univers où tous les événements élémentaires sont équiprobables.

### Présentation et rédaction :

On utilisera, pour déterminer les probabilités demandées dans un exercice,

➤ soit un arbre

Exercice : Examinons le classique jeu de " pile ou face ".  
On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.  
Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois " face " exactement sur les trois résultats ?



Toutes les issues sont équiprobables ( elles ont la même probabilité de se produire ).  
Il y en a 8. Trois seulement correspondent à " exactement deux fois face ".

Donc la probabilité de cet événement est  $\frac{3}{8}$ .

**ATTENTION , ce raisonnement n'est valable qu'en cas d'équiprobabilité !**

On peut aussi faire le calcul suivant ( méthode valable dans tous les cas ) :

$$P(\text{PFF}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} ; P(\text{FPP}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} ; P(\text{FFP}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

La probabilité cherchée est la somme de ces 3 probabilités :  $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ .

- soit un diagramme de Wenn.
- soit un tableau à double-entrée

Exemple :

Parmi 80 jeunes-filles en Terminale au lycée il y a 10 ans, 36 sont maintenant salariées, 39 sont mères de famille et 15 sont salariées et mère de famille.

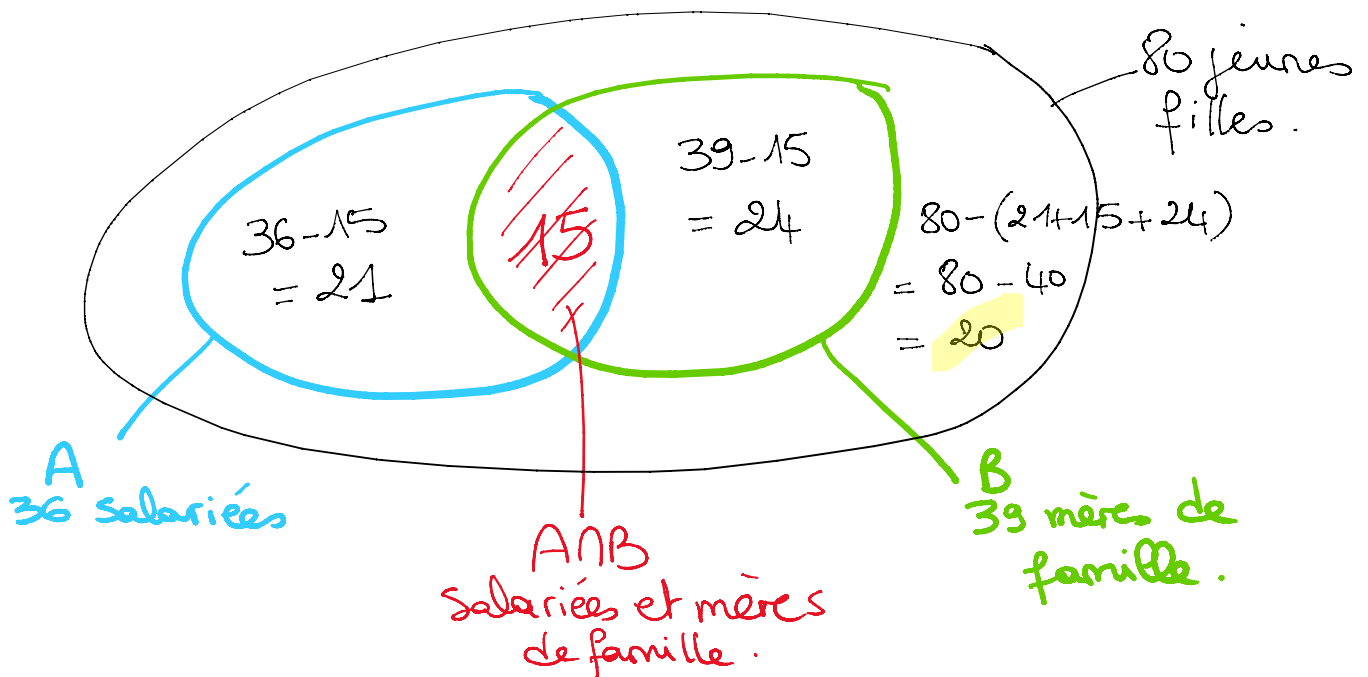
On choisit au hasard une de ces jeunes femmes.

On pose A l'événement " la jeune femme est salariée "

et B l'événement " la jeune femme est mère de famille "

Calculer la probabilité que la jeune femme choisie ne soit ni salariée, ni mère de famille.

Diagramme de Wenn :



La probabilité cherchée est  $\frac{20}{80} = \frac{1}{4}$

Tableau à double-entrée :

	B	B	TOTAL
A	15	$36 - 15 = 21$	36
$\bar{A}$	$39 - 15 = 24$	$41 - 21 = 20$	$80 - 36 = 44$
TOTAL	39	$80 - 39 = 41$	80

La probabilité cherchée est  $\frac{20}{80} = \frac{1}{4}$