PROBABILITES– ECHANTILLONNAGE

I. Petit historique des probabilités:

Le calcul des probabilités débuta véritablement au XVIIè siècle avec Pascal et Fermat puis Huygens et Bernoulli qui entreprirent l'étude de certains jeux de hasard.
Il s'est considérablement développé au XIXè siècle pour être appliqué aux Sciences Sociales (Economie) , aux Sciences Physiques (Thermodynamique).
C'est en 1933 que le Soviétique Kolmogorov en a donné une axiomatique cohérente.
Le fait que des événements se produisent au hasard n'implique pas une totale absence d'ordre.

Que permettent d'évaluer les probabilités ?

Les probabilités sont utiles pour généraliser des observations recueillies à partir de données statistiques.

Exemple : Une compagnie d'assurance ne pourra pas savoir lequel de ses clients aura un accident l'an prochain mais elle pourra dire que , à coup sûr , 5% de ses clients auront un accident ce qui permettra de fixer le montant des primes.

II. Le langage des probabilités:

Prenons l'exemple d'un jeu de dé : on lance un dé à six faces et on note le numéro porté par la face supérieure lors de son arrêt.

Le lancer du dé sera **l'expérience aléatoire.**

Après un lancer de dé on pourra obtenir 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
Ces six possibilités seront appelées **cas possibles** ou **éventualités** ou **issues**.

L'ensemble de tous les cas possibles ou de toutes les éventualités est appelé **l'univers.**
Il est souvent noté E ou Ω. Ici $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.

On appelle **événement** une partie ou un sous–ensemble de l'univers E.

L'événement " obtenir 2 " se limite a un seul cas possible. On dit que c'est un **événement élémentaire**.

L'événement " obtenir 4 ou 5 " est constitué de 2 éventualités. C'est le sous-ensemble $\{4 ; 5 \}$ de E .

L'événement " obtenir 7 " n'est constitué d'aucune éventualité. C'est le sous-ensemble vide de E .
On dira que c'est **l'événement impossible.**

L'événement "obtenir un nombre strictement inférieur à 7" est constitué par tous les éléments de E.
C'est l'univers E en entier. On dit que c'est **l'événement certain.**

III. Calcul de la probabilité d'un événement :

1) Probabilité d'un événement :

Chaque probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, exprimé en général sous forme de fraction (ou de nombre décimal si c'est possible).

La somme des probabilités de tous les événements élémentaires d'un univers fait 1.

$p(\varnothing) = 0$ La probabilité de l'événement impossible fait 0.

$p(E) = 1$ La probabilité de l'événement certain fait 1.

On définit une loi de probabilité de l'expérience aléatoire lorsque l'on donne les probabilités de chaque événement élémentaire.

Modéliser une expérience aléatoire, c'est définir l'univers E, les différentes issues, et une loi de probabilité sur E qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.

2) Calcul de la probabilité d'un événement :

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qu'il contient. On la note P(A).

Reprenons l'exemple du lancer de dé du II.
Si l'on calcule la probabilité d'obtenir un résultat inférieur strictement à 5 on a :

A = P(A) =

3) Réunion et intersection d'événements :

$A \cap B$ ou « **A et B** », est l'événement constitué des issues qui sont à la fois dans A et dans B.
$A \cup B$ ou « **A ou B** », est l'événement constitué des issues qui sont dans l'un **au moins** des événements A et B.

Si A et B sont deux événements d'un univers E on a :
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exemple : Soit A l'événement " obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 " A =

Soit B l'événement " obtenir un résultat pair ". B =

$A \cap B =$ $A \cup B =$

$P(A) =$; $P(B) =$; $P(A \cap B) =$; $P(A \cup B) =$

on a en effet $P(A \cup B) =$

4) Les événements contraires :

L'événement contraire à l'événement A , noté $\overline{A}$, est l'ensemble de toutes les issues qui ne sont pas dans A**.**
On a alors $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = E$ et **$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.**

Exemple : Soit l'événement A " obtenir un multiple de 3 " A =

L'événement contraire de A , noté $\overline{A}$,sera : " ne pas obtenir un multiple de 3 "

$\overline{A} =$

$A \cup \overline{A} =$; $A \cap \overline{A} =$

On dit que $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E.

$P(A) =$; $P(\overline{A}) =$ $P(A) + P(\overline{A}) =$ donc $P(\overline{A}) =$

5) Les événements incompatibles :

Si A et B sont deux évènements tels que $A \cap B = \varnothing$ on dira que **A et B sont incompatibles**.

6) Loi équirépartie. Equiprobabilité :

Si tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit que **les issues sont équiprobables ou qu'il y a équiprobabilité.**

Dans ce cas, **chaque probabilité est égale à $\frac{1}{n}$ avec n le nombre d'élément de E.**

On a alors pour tout événement A :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de E}} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Si un dé est pipé ou truqué , les événements élémentaires n'ont plus alors la même probabilité.

Exercice : Un dé a été truqué de telle sorte que la probabilité de sortie du 6 soit le triple de la probabilité de sortie du 1.Les numéros 1 ,2 ,3 ,4 et 5 ont la même probabilité de sortie.

1) Calculer la probabilité de sortie de chaque numéro.

2) Calculer la probabilité de l'événement A : " obtenir un numéro pair ".

7) Résolution des problèmes liés aux probabilités :

Importance du choix de l'univers :

Les calculs seront grandement facilités si l'on peut faire le choix d'un univers où tous les événements élémentaires sont équiprobables.

Présentation et rédaction :

On utilisera, pour déterminer les probabilités demandées dans un exercice,

- **soit un arbre**

Exercice : Examinons le classique jeu de " pile ou face ".
On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.
Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois " face " exactement sur les trois résultats ?

- **soit un diagramme de Wenn.**
- **soit un tableau à double-entrée**

Exemple :
Parmi 80 jeunes-filles en Terminale au lycée il y a 10 ans, 36 sont maintenant salariées, 39 sont mères de famille et 15 sont salariées et mère de famille.
On choisit au hasard une de ces jeunes femmes.
On pose A l'événement " la jeune femme est salariée "
et B l'événement " la jeune femme est mère de famille "
Calculer la probabilité que la jeune femme choisie ne soit ni salariée, ni mère de famille.

Diagramme de Wenn :

Tableau à double-entrée :

	B	$\overline{B}$	TOTAL
A			
$\overline{A}$			
TOTAL			

IV. Fluctuation d'échantillonnage :

1) Définitions :

• **Echantillon statistique**

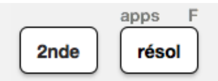
Soit une série statistique formée des résultats d’une expérience, réalisée n fois, dans les mêmes conditions. Cette série constitue un échantillon statistique de taille n.

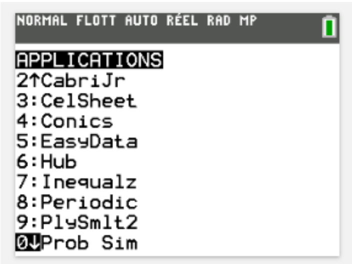
• **Distribution des fréquences**

La distribution des fréquences associée à un échantillon est la liste des fréquences des issues de l’échantillon.

Exemple : On lance un dé numéroté de 1 à 6, bien équilibré, et on lit le chiffre qui apparaît sur la face supérieure. Si on répète ce lancer 20 fois, on obtient un échantillon de taille 20.

➢ **Simulation d'un lancer de dés avec la calculette :**



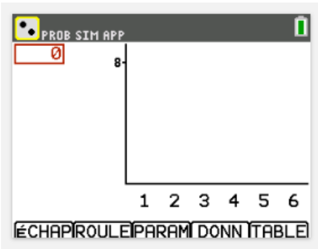


On choisit le menu 0 intitulé Prob Sim.

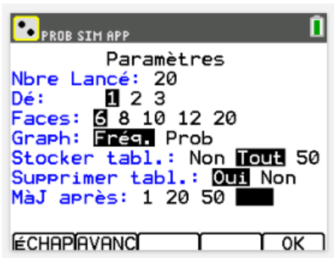
Puis le menu 2 : Faire rouler des dés


On remarquera que l'on peut grâce à ce menu, simuler bien d'autres expériences aléatoires.

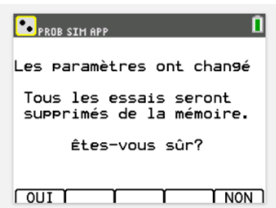
Puis 

pour choisir OK.


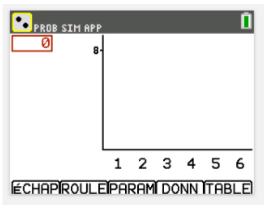
Puis 

pour PARAM (on pourra ainsi paramétrer le jeu)


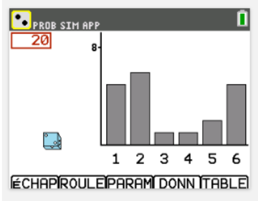
puis 

pour OK.


puis 

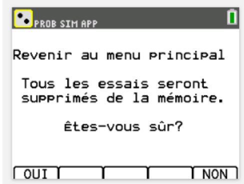
pour choisir OUI.


Lancer le jeu avec 

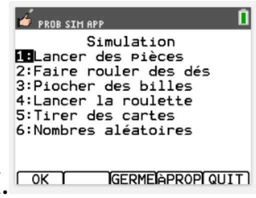


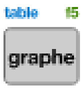
Les données sont stockées dans la liste D1.

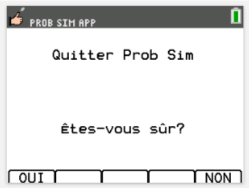
Pour trouver cette liste et la faire classer dans l'ordre croissant on fait :

pour choisir ECHAP . 

puis 

pour choisir OUI. 

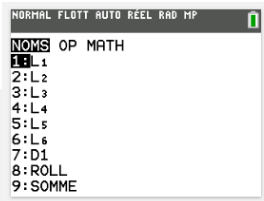
puis 

pour OK 

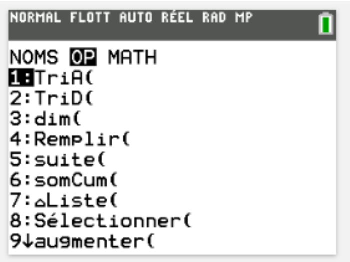
et 

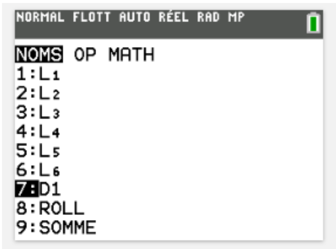
pour OUI.

On accede ensuite au menu Listes 

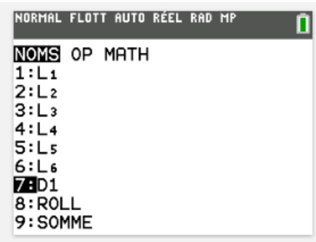


Dans le menu OP on choisit TriA(puis D1 pour faire trier dans l'ordre croissant la liste D1.

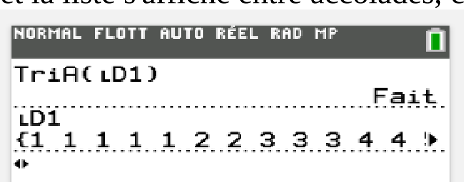


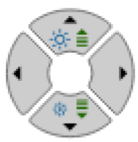


On retourne alors dans le menu listes et on choisit la liste D1.



et la liste s'affiche entre accolades, classée.



Pour la parcourir il suffit de se déplacer avec 

Utiliser cette fonctionnalité pour simuler 20 lancers successifs d'un dé équilibré numéroté de 1 à 6, puis compléter le tableau suivant :

Chiffre de la face supérieure	1	2	3	4	5	6
Effectif						
Fréquence						

Recommencer une nouvelle fois :

Chiffre de la face supérieure	1	2	3	4	5	6
Effectif						
Fréquence						

Comparer les résultats des deux tableaux. Que remarque-t-on ?
On remarque que l'on n'obtient pas les mêmes résultats.

On dit que **pour des échantillons de même taille les fréquences peuvent fluctuer.**

- **Fluctuation d'échantillonnage**

Les distributions des fréquences varient d'un échantillon à l'autre pour une même expérience : c'est ce qu'on appelle **la fluctuation d'échantillonnage.**

On démontre que l'intervalle de fluctuation des fréquences à 95% est $[\, p - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}} \,]$

avec p la probabilité de l'événement étudié et n le nombre d'expériences faites.
Il faut aussi que $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$.

Exemple :

Reprendre l'exemple précédent pour simuler 50 lancers successifs puis 100 puis 200 puis 500 du même dé.
Reproduire dans des tableaux différents les distributions des fréquences pour chaque cas.

Pour 50 lancers

Chiffre de la face supérieure	1	2	3	4	5	6
Effectif						
Fréquence						

Pour 100 lancers

Chiffre de la face supérieure	1	2	3	4	5	6
Effectif						
Fréquence						

Pour 200 lancers

Chiffre de la face supérieure	1	2	3	4	5	6
Effectif						
Fréquence						

Pour 500 lancers

Chiffre de la face supérieure	1	2	3	4	5	6
Effectif						
Fréquence						

Que remarque-t-on ?

Conclusion : **Lorsque la taille n de l'échantillon augmente, l'ampleur des fluctuations des distributions des fréquences calculées sur ces échantillons diminue et les fréquences tendent à se stabiliser et à se rapprocher de la probabilité théorique d'apparition de chaque face qui est $\frac{1}{6}$.**

En effet, dans ce cas, la largeur de l'intervalle de fluctuation qui est $\frac{2}{\sqrt{n}}$ diminue.

Exercice :

On lance 100 fois une pièce de monnaie bien équilibrée.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation des fréquences à 95% pour cette expérience aléatoire.

2) Un élève affirme qu'il a obtenu une fréquence d'apparition de Pile égale à 0,7. Que peut-on en conclure ?