LES FONCTIONS DE REFERENCE

I. La fonction carré :

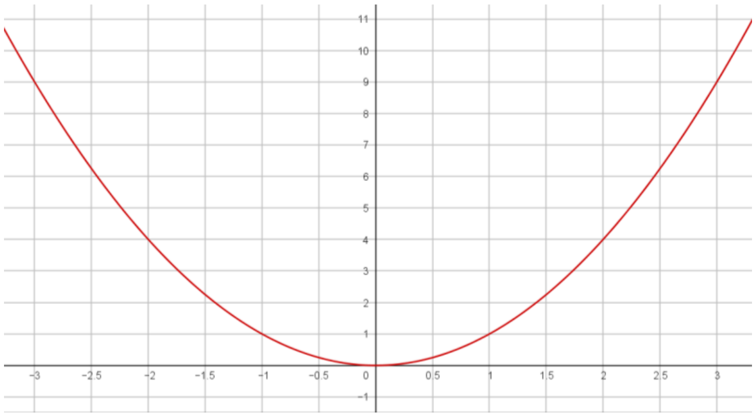
1) Définition :

La fonction carré est la fonction définie sur R par $f(x) = x^2$.

2) Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

3) Courbe représentative :



Sa représentation graphique est une parabole

4) Sens de variation de la fonction carré

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0\ ]$ et strictement croissante sur $[\ 0\ ;\ +\infty\ [$

Le minimum de la fonction carré est 0.

Il est atteint pour $x = 0$.

On peut donc dire que pour tout x , $x^2 \geq 0$

Ordre et fonction carré :

$2 < 5$ donc $2^2 < 5^2$ car la fonction carré est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty\ [$, elle ne perturbe pas l'ordre.

$-6 < -3$ donc $(-6)^2 > (-3)^2$ car la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$, elle perturbe l'ordre.

Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.
On dira que la fonction carré conserve l'ordre sur $[\ 0\ ;\ +\infty\ [$

Deux nombres négatifs sont rangés dans le sens inverse de leurs carrés.
On dira que la fonction carré inverse l'ordre sur $]-\infty\ ;\ 0\ ]$.

Application :

Résoudre algébriquement (par le calcul) :

$x^2 = 0$; $x^2 = 5$; $x^2 = -3$; $x^2 > 0$; $x^2 < 6$; $x^2 \geq 4$; $x^2 = 2x - 1$

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $S = \{0\}$

$x^2 = 5 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$ $S = \{ -\sqrt{5} ; \sqrt{5} \}$

$x^2 = -3$ $S = \varnothing$ car un carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul.

$x^2 > 0$ $S =]-\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$ Tous les réels sauf 0 ont un carré strictement positif.

$x^2 < 6 \Leftrightarrow -\sqrt{6} < x < \sqrt{6}$ $S =] -\sqrt{6} ; \sqrt{6} [$

$x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{4}$ ou $x \geq \sqrt{4} \Leftrightarrow x \leq -2$ ou $x \geq 2$ $S =] -\infty ; -2 [\cup] 2 ; +\infty [$

$x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $S = \{ 1 \}$

II. La fonction inverse :

1) Définition :

La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ privé de 0, noté $\mathbb{R}-\{0\}$ ou $\mathbb{R}^*$ ou $]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$. 0 est la valeur interdite de la fonction inverse.

2) Tableau de valeurs :

x	-4	-2	-1	$-0{,}8$	$-0{,}5$	$-0{,}25$	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}8$	1	2	4
$f(x)$	$-\dfrac{1}{4}$	$-\dfrac{1}{2}$	-1	$-\dfrac{5}{4}$	-2	-4	4	2	$\dfrac{5}{4}$	1	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$

3) Courbe représentative :

Sa représentation graphique est une hyperbole

4) Sens de variation de la fonction inverse

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0\,[$ et strictement décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$. 0 est une valeur interdite.

Ordre et fonction inverse :

$2<5$ donc $\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{5}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

$-6<-3$ donc $-\dfrac{1}{6}>-\dfrac{1}{3}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0\,[$.

La fonction inverse perturbe l'ordre sur $]-\infty\,;0\,[$ et sur $]\,0\,;+\infty\,[$

<u>Application :</u>
Résoudre algébriquement :

$\frac{1}{x} = 0$; $\frac{1}{x} = 1$; $\frac{1}{x} = -2$; $\frac{1}{x} > 3$; $\frac{1}{x} < -1$; $\frac{1}{x} \geq -\frac{1}{2}$; $\frac{1}{x} = -x + 2$

$\frac{1}{x} = 0$ Une fraction dont le numérateur vaut 1 ne peut pas être nulle donc $S = \varnothing$

$\frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ $S = \{ 1 \}$

$\frac{1}{x} = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ $S = \{ -\frac{1}{2} \}$

$\frac{1}{x} > 3 \Leftrightarrow x > 0$ et $x < \frac{1}{3}$ donc $S =]\, 0 \,;\, \frac{1}{3}\, [$

$\frac{1}{x} < -1 \Leftrightarrow x < 0$ et $x > -1$ donc $S =]\, -1 \,;\, 0\, [$

$\frac{1}{x} \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x < 0$ et $x \leq -2$ ou $x > 0$ donc $S =]\, -\infty \,;\, -2\,] \cup]\, 0 \,;\, +\infty\, [$

$\frac{1}{x} = -x + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + x^2 - 2x}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$ et $x \neq 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$ et $x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ et $x \neq 0$

$S = \{ 1 \}$

III. La fonction racine carrée :

1) Généralités:

La racine carrée d'un nombre réel **positif** x est le nombre réel **positif** dont le carré est x .

Si $x \geq 0$ alors $\sqrt{x} = a$ avec $a \geq 0$ et $a^2 = x$

Exemple : $\sqrt{4} = 2$ car $2^2 = 4$ et $2 > 0$

Attention ! $\sqrt{4} \neq -2$ car $-2 < 0$ pourtant $(-2)^2 = 4$

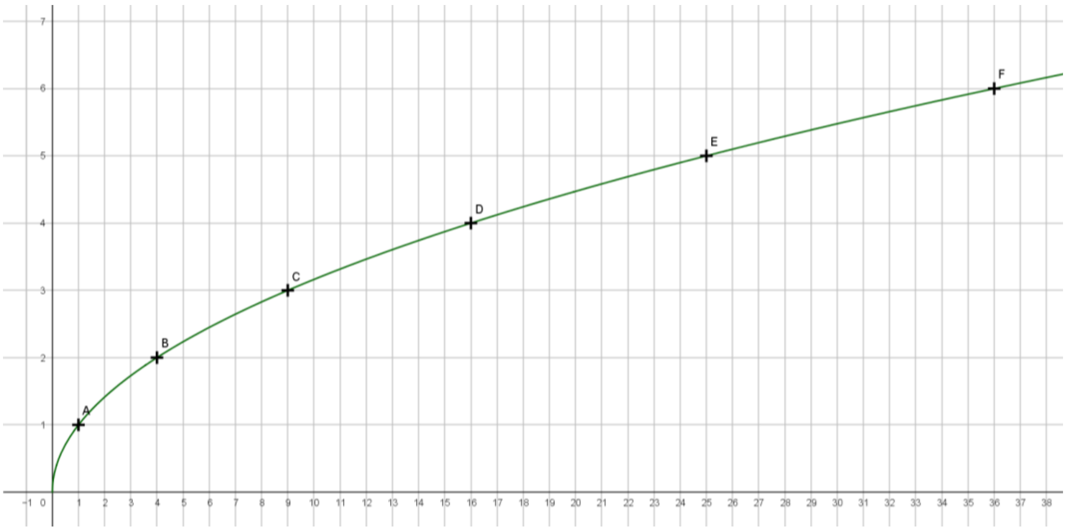
L'ensemble de définition de la fonction racine carrée est $[\,0\,;+\infty\,[$

La racine carrée d'un réel négatif n'existe pas !

2) Tableau de valeurs :

x	0	1	4	9	16	25	36
$f(x)$	0	1	2	3	4	5	6

3) Courbe représentative :



4) Sens de variation de la fonction racine carrée

Tableau de variation :

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$f(x)$	$0 \nearrow$

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$

Le minimum de la fonction racine carrée est 0.

Il est atteint pour $x = 0$.

On peut donc dire que pour tout x , $\sqrt{x} \geq 0$

Ordre et fonction racine carrée :

$2 < 5$ donc $\sqrt{2} < \sqrt{5}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty\,[$, elle ne perturbe pas l'ordre.

Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées.
On dira que la fonction racine carrée conserve l'ordre sur $[\,0\,;+\infty\,[$

Application :

Résoudre algébriquement (par le calcul) :

$\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ S = {0}

$\sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = 5^2$ car la fonction carré est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [

$\Leftrightarrow x = 25$ S = { 25 }

$\sqrt{x} = -3$ S = ∅ car une racine carrée est toujours positive ou nulle

$\sqrt{x} > 0$ S =] 0 ; + ∞ [car une racine carrée est toujours positive ou nulle

$\sqrt{x} < 6 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 < 6^2$ car la fonction carré est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [

$\Leftrightarrow x < 36$ S = [0 ; 36 [

$\sqrt{x} \geq 4 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 \geq 4^2$ car la fonction carré est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [

$\Leftrightarrow x \geq 16$ S = [16 ; + ∞ [

IV. La fonction cube :

1) a) Définition :

La fonction cube est la fonction définie sur R par $f(x) = x^3 = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x}$.

b) Exemples :

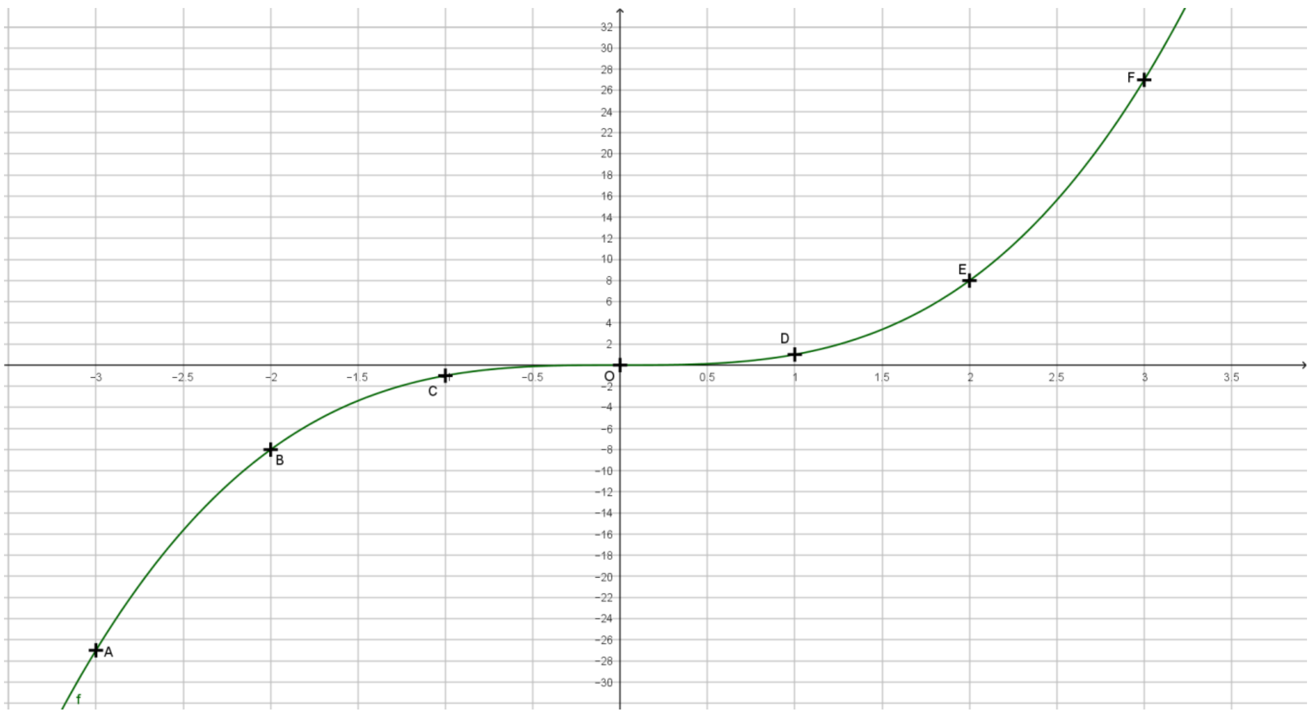
- puisque $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, le cube de 2 vaut 8.
- le cube de -3 est $(-3) \times (-3) \times (-3) = -3 \times 3 \times 3 = -27$.
  (le produit de trois nombres négatifs est négatif) .
  Le cube de -3 se note $(-3)^3$ et on a $(-3)^3 = -27$.
- REMARQUE : ne pas confondre $(-3)^3$ et -3^3 , même si le résultat est le même .
  $(-3)^3$ est le cube de -3 et -3^3 est l'opposé du cube de 3.
- Utiliser sa calculatrice pour effectuer les calculs suivants :
  $-2{,}5^3 = -15{,}625$ $(-2{,}5)^3 = -15{,}625$ $-2{,}5^2 = -6{,}25$ $(-2{,}5)^2 = 6{,}25$
  Compléter :

x	-10	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	0	$\sqrt{2}$	$-1{,}4$	$2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$
le cube de $\boldsymbol{x}$	-1000	$\frac{1}{27}$	$\frac{27}{64}$	0	$2\sqrt{2}$	$-2{,}744$	$\frac{125}{27}$

2) Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-27	-8	-1	0	1	8	27

3) Courbe représentative :



Sa représentation graphique est une courbe symétrique par rapport à l'origine du repère.
O est le centre de symétrie de la courbe de la fonction cube.

4) Sens de variation de la fonction cube

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ordre et fonction cube :

$2 < 5$ donc $2^3 < 5^3$ car la fonction cube est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, elle ne perturbe pas l'ordre.

$-6 < -3$ donc $(-6)^3 < (-3)^3$ car la fonction cube est strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$, elle ne perturbe pas l'ordre.

Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs cubes.
On dira que la fonction cube conserve l'ordre sur $[0 ; +\infty[$

Deux nombres négatifs sont rangés dans le sens inverse de leurs cubes.
On dira que la fonction cube conserve l'ordre sur $]-\infty ; 0]$.

Si a et b sont deux réels quelconques, leur cube sont rangés dans le même ordre.

$$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$$

Applications :

Exercice 1 : On donne $a = (-2,1)^3$, $b = -3,5^3$, $c = (\frac{2}{3})^3$ et $d = (\sqrt{7})^3$.

Comparez sans les calculer ces 4 réels .

$-3,5^3 = (-3,5)^3$ et $-3,5 < -2,1 < \frac{2}{3} < \sqrt{7}$

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle ne perturbe pas l'ordre.

donc $-3,5^3 < (-2,1)^3 < (\frac{2}{3})^3 < (\sqrt{7})^3$

Exercice 2 : L'arête d'un cube est notée a. On sait que $4,32 < a < 4,37$ en cm.
Déterminer un encadrement du volume V de ce solide en mm^3 (encadrement à l'aide de décimaux arrondis au dixième).

$V = a^3$ et

$4,32 < a < 4,37$

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle ne perturbe pas l'ordre.

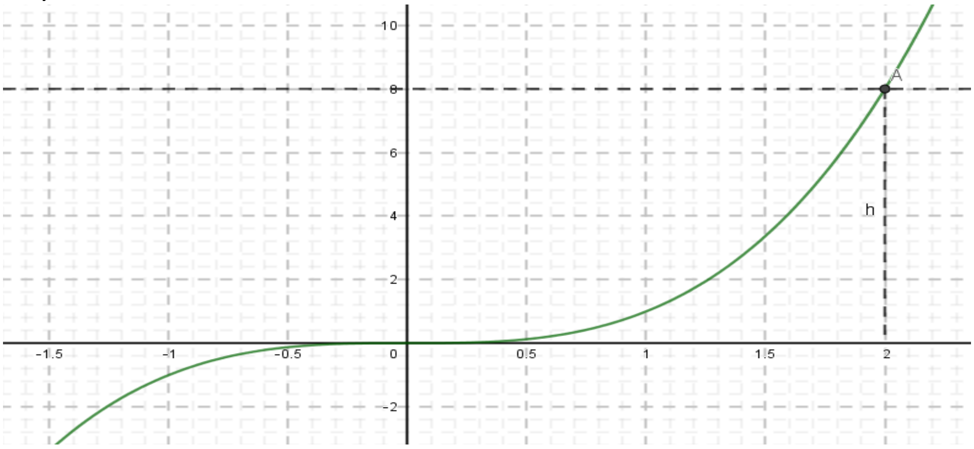
donc $4,32^3 < a^3 < 4,37^3$ donc $80,62157 < V < 83,45345$ en cm^3

donc $80\,621,6 < V < 83\,453,5$ en mm^3 arrondis au dixième.

5) Résolution de l'équation x^3 = a où a est un nombre connu.

Exemple 1 :

a = 8 . Résolvons $x^3 = 8$. Il s'agit de déterminer tous les nombres dont le cube vaut 8.
Il ne peut pas y en avoir plusieurs solutions puisque la fonction cube est strictement croissante sur IR.
La courbe représentative de la fonction cube est coupée une seule fois par la droite horizontale d'équation y = 8.



$x^3 = 8$ a une seule solution qui est la valeur 2, c'était facile…

Vocabulaire : On dit que 2 est la racine cubique de 8.

Notations : il y a deux possibilités

- la racine cubique de 8 se note $\sqrt[3]{8}$.
- la racine cubique de 8 se note $8^{1/3}$

  explication : $8^{1/3}$ est la racine cubique de 8 donc son cube vaut 8 .

  en effet $(8^{1/3})^3 = 8^{1/3 \times 3} = 8^1 = 8$

  (cohérence avec les règles de calculs connus sur les exposants entiers)

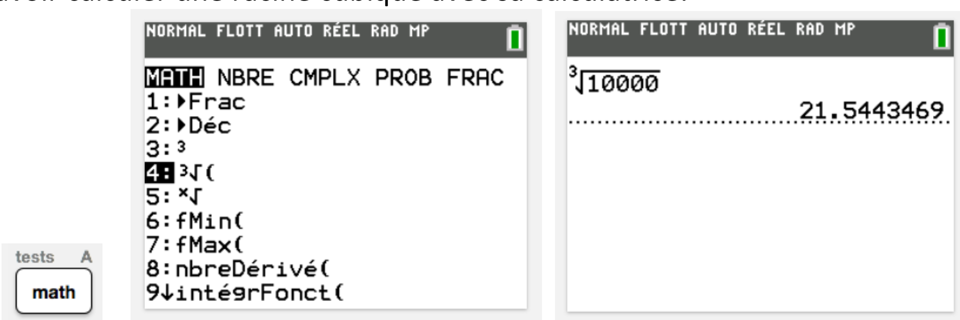
Généralisation : La racine cubique de a est **LE** nombre dont le cube vaut a , il se note $\sqrt[3]{a}$ ou $a^{1/3}$.

- $\sqrt[3]{125} = 5$ puisque $5^3 = 125$.
- la racine cubique de 40 est $\sqrt[3]{40} = 40^{1/3}$

  De plus $3{,}41^3 = 39{,}651821$ et que $3{,}42^3 = 40{,}001688$

  donc $\sqrt[3]{40}$ est comprise entre les valeurs 3,41 et 3,42.

- savoir calculer une racine cubique avec sa calculatrice.



$\sqrt[3]{10\,000} \approx 21{,}54$ au centième près.