

**EXERCICE 1 (7 points)****Thème : probabilités**

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.

Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.

Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

**Partie A**

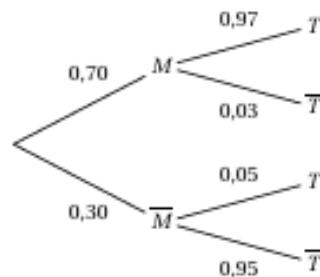
Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.

On considère les événements suivants :

- $M$  : « le coyote est malade » ;
- $T$  : « le test du coyote est positif ».

On note  $\overline{M}$  et  $\overline{T}$  respectivement les événements contraires de  $M$  et  $T$ .

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.

On calcule  $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,7 \times 0,97 = 0,679$

3. Démontrer que la probabilité de  $T$  est égale à 0,694.

D'après la loi des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T); \text{ or}$$

$$P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,3 \times 0,05 = 0,015, \text{ d'où :}$$

$$P(T) = 0,679 + 0,015 = 0,694.$$

4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.

Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.

$$\text{On calcule donc } P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,679}{0,694} \approx 0,9784 \text{ soit } 0,978 \text{ au millième près.}$$

5. a. Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur en arrondissant au millième.

On appelle « valeur prédictive négative du test » la probabilité que le coyote ne soit pas malade sachant que son test est négatif.

$$\text{Elle est égale à } P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{P(\overline{T} \cap \overline{M})}{P(\overline{T})}.$$

$$\text{Or } P(\overline{T} \cap \overline{M}) = P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(\overline{M});$$

$$\bullet P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,694 = 0,306;$$

$$\bullet P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{P(\overline{T} \cap \overline{M})}{P(\overline{T})} = \frac{0,3 \times 0,95}{0,306} \approx 0,9313, \text{ soit } 0,931 \text{ au millième près.}$$

- b. Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter.

Comme  $0,978 > 0,931$  cela signifie qu'un résultat positif (erreur d'à peu près 2 %) est plus probant qu'un résultat négatif (erreur d'à peu près 7 %).

## Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de 0,694.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.

On note  $X$  la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.

- a. Quelle est la loi de probabilité suivie par  $X$ ? Justifier et préciser ses paramètres.

Le nombre de coyotes est assez important pour que toutes les captures indépendantes sont celles d'animaux dont la probabilité de positivité au test est de 0,694. La variable  $X$  suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 5$  et  $P = 0,694$ .

- b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.

On sait que  $P(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0,694^1 \times (1 - 0,694)^{5-1} \approx 0,030$  soit 0,03 au centième près.

- c. Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie? Justifier la réponse.

On vérifie si effectivement  $P(X \geq 4) > \frac{1}{2}$ .

Or  $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$ ;

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} \times 0,694^4 \times 0,306^1 \approx 0,3549 \text{ et}$$

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} \times 0,694^5 \times 0,306^0 \approx 0,1609$$

Donc  $P(X \geq 4) \approx 0,3549 + 0,1609$ , soit  $P(X \geq 4) \approx 0,5158$  valeur supérieure à 0,5 : le vétérinaire a raison.

2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à 0,99?

Il faut trouver  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $P(Y \geq 1) > 0,99$  avec  $Y$  variable aléatoire associée au nombre de coyotes ayant un test positif.

Or  $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,694^0 \times 0,306^n = 1 - 0,306^n$ . Il faut donc résoudre dans  $\mathbb{N}$  l'inéquation :  $1 - 0,306^n > 0,99 \iff 0,01 > 0,306^n$

Par croissance de la fonction logarithme népérien :  $\ln 0,01 > n \ln 0,306 \iff \frac{\ln 0,01}{\ln 0,306} < n$  car  $\ln 0,306 < 0$ .

Comme  $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,306} \approx 3,9$  : il faut donc capturer au moins 4 coyotes.

**EXERCICE 2 (7 points)**
**Thème : fonctions logarithme et suites.**

1. • On sait que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .  
 • Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ , on a par produit de limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$  et enfin  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2. a. La fonction  $f$  est continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$ . En utilisant le formule de la dérivée d'un produit,  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$   
 b.  $f'(x) \geq 0 \iff \ln(x) + 1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq e^{-1}$ .  
 Dans le tableau :  $f(e^{-1}) = e^{-1} \ln(e^{-1}) + 1 = -e^{-1} + 1 = 1 - e^{-1} > 0$

| $x$     | 0 | $e^{-1}$                   | 1 | $+\infty$ |
|---------|---|----------------------------|---|-----------|
| $f'(x)$ |   | -                          | 0 | +         |
| $f(x)$  | 1 | $1 - e^{-1} \approx 0,632$ | 1 | $+\infty$ |

- c.  $f(1) = 1$ . D'après les variations de la fonction  $f$ ,

- $\forall x \in ]0; e^{-1}], f(x) \in [1 - e^{-1}; 1];$
- $\forall x \in [e^{-1}; 1], f(x) \in [1 - e^{-1}; 1].$

Donc  $\forall x \in ]0; 1], f(x) \in [1 - e^{-1}; 1]$ . Or  $1 - e^{-1} > 0$  donc  $f(x) \in ]0; 1]$  pour tout réel  $x$  dans  $]0; 1]$ .

3. a. L'équation de la tangente  $(T)$  à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

Avec  $f'(1) = 1$  et  $f(1) = 1$ , on en déduit l'équation de  $(T)$  :  $y = x - 1 + 1 = x$ , soit

$$M(x; y) \in (T) \iff y = x.$$

- b. Nous savons que  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = \ln(x) + 1$ .

La fonction  $f'$  est continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$ , et  $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ , donc  $f$  est convexe sur  $]0; +\infty[$ .

- c. La courbe représentative d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes. En particulier  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de  $(T)$ . Donc  $\forall x \in ]0; +\infty[, f(x) \geq x$ .

4. Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 \in ]0; 1]$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- a. Montrons par récurrence que  $0 < u_n < 1$  pour tout entier naturel  $n$ .

*Initialisation* : on a  $u_0 \in ]0; 1]$ , soit  $0 < u_0 < 1$  : l'encadrement est vrai au rang 0;

*Hérédité* : soit  $n \in \mathbb{N}$  et supposons que  $0 < u_n < 1$ .

On a vu à la question 2. b. que si  $0 < x < 1$ , alors  $0 < f(x) < 1$ .

Donc si  $0 < u_n < 1$ , alors  $0 < f(u_n) < 1$ , soit  $0 < u_{n+1} < 1$ .

*Conclusion* : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang  $n \in \mathbb{N}$ , il l'est aussi au rang  $n + 1$  : d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $0 < u_n < 1$ .

- b. D'après la question 3.c, pour tout réel  $x$  positif,  $f(x) > x$ .

De plus pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$

Donc,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f(u_n) > u_n$  donc  $u_{n+1} > u_n$ . La suite  $(u_n)$  est donc croissante.

- c. La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 1. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite  $(u_n)$  converge vers une limite finie notée  $l$ .

### Exercice 3 :

#### Affirmation 1 : Vraie

$$\begin{aligned}\vec{EK} &= \vec{EH} + \vec{HK} \\ &= \vec{BC} + \vec{FJ} \quad (\text{car } \vec{EH} = \vec{AD} = \vec{BC} \text{ et } \vec{HK} = \frac{\vec{HD}}{2} = \frac{\vec{EA}}{2} = \frac{\vec{FB}}{2} = \vec{FJ}) \\ &= \vec{BI} + \vec{IC} + \vec{FJ} \\ &= \frac{1}{2} \vec{BA} + \vec{IC} + \vec{FJ} \\ &= \vec{IC} - \frac{1}{2} \vec{AB} + \vec{FJ}\end{aligned}$$

#### Affirmation 2 : Vraie

$$\begin{aligned}\vec{BH} &= \vec{BE} + \vec{EH} \quad (\text{Relation de Chasles}) \\ &= \vec{BE} + \vec{BC} \quad (\text{car } \vec{EH} = \vec{AD} = \vec{BC})\end{aligned}$$

Donc les trois vecteurs  $\vec{BH}$ ,  $\vec{BE}$ ,  $\vec{BC}$  sont bien coplanaires.

#### Affirmation 3 : Vraie

L'espace est rapporté au repère  $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ . On a :  $J(1; 0; 0,5)$  et  $H(0; 1; 1)$

La droite de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = -2 - 2k \\ y = 3 + 2k \\ z = 2 + k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$  donne le point J pour  $k = -1,5$  et le point H pour  $k = -1$ . Il s'agit donc bien de (JH).

#### Affirmation 4 : Fausse

On a :  $G(1; 1; 1)$

La droite d a pour représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 1 = 2 - t \\ 1 = t \\ 1 = -1 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = t \\ 1 = t \\ \frac{2}{3} = t \end{cases} \quad \text{le système n'ayant pas de solution G n'est pas un point de d.}$$

#### Affirmation 5 : Vraie

La droite d a pour représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

La droite d' a pour représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 3t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$

Cherchons l'intersection de ces droites.

$$\begin{cases} 2 - t = 3 + t' \\ t = 1 + 2t' \\ -1 + 3t = 3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 2t' \\ 2 - (1 + 2t') = 3 + t' \\ -1 + 3(1 + 2t') = 3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 2t' \\ t' = \frac{-2}{3} \\ t' = \frac{-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1}{3} \\ t' = \frac{-2}{3} \\ t' = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

Le système admet une solution, donc les droites sont sécantes et donc coplanaires.

#### Exercice 4 :

*Principaux domaines abordés :* Suites numériques. Algorithmique et programmation.

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

##### Partie A : modèle discret de la quantité médicamenteuse

1. Au bout de 30 min, 10 % de 1 mg ont disparu : il en reste donc 0,9 mg et on donne alors 0,25 mg supplémentaires : on a donc  $u_1 = 1,15$ .
2. Si  $u_n$  est la quantité de médicament présente au bout de  $n$  périodes de 30 min, à la  $(n+1)^{\text{e}}$  période 10 % auront disparu ; il en restera donc  $0,9u_n$  et on donne alors 0,25 mg de médicament supplémentaire ; on a donc  $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$ .
3.
  - a. *Initialisation* Pour  $n = 0$ . On a  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 1,15$  soit  $u_0 \leq u_1 < 5$  : l'encadrement est réalisé au rang 0.  
*Hérédité* : Soit  $n \in \mathbb{N}$  et supposons que  $u_n \leq u_{n+1} < 5$ .  
Alors en multipliant par 0,9 :  $0,9u_n \leq 0,9u_{n+1} < 0,9 \times 5$  et en ajoutant 0,25 à chaque membre :  $0,9u_n + 0,25 \leq 0,9u_{n+1} + 0,25 < 0,9 \times 5 + 0,25$ , soit  $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 4,75 < 5$ .  
On a donc :  $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 5$  : l'encadrement est vrai au rang  $(n+1)$ .  
L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang  $n$ , il l'est aussi au rang  $n+1$  : d'après le principe de récurrence : pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1} < 5$ .
  - b. La première partie du résultat précédent montre que la suite  $(u_n)$  est croissante et la deuxième que cette suite est majorée par 5 : elle est donc convergente vers une limite  $\ell \leq 5$ .
4.
  - a. Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():  
    u=1  
    n=0  
    while u < 1.8 :  
        u=0.9*u+0.25  
        n = n+1  
    return n
```

- b. Le script renvoie  $n = 8$ , car  $u_8 \approx 1,854 > 1,8$ .  
Le médicament est réellement efficace après 4 heures.
5.
  - a. On a donc  $v_{n+1} = 2,5 - u_{n+1} \iff u_{n+1} = 2,5 - v_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$ .  
Or  $v_n = 2,5 - u_n \iff u_n = 2,5 - v_n$  ; l'égalité précédente devient donc :  
 $2,5 - v_{n+1} = 0,9(2,5 - v_n) + 0,25 \iff 2,5 - v_{n+1} = 2,25 - 0,9v_n + 0,25 \iff v_{n+1} = 0,9v_n$  : cette égalité montre que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,9 de premier terme  $v_0 = 2,5 - u_0 = 2,5 - 1 = 1,5$ .
  - b. On sait que quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = v_0 \times 0,9^n$ , soit  $v_n = 1,5 \times 0,9^n$ , d'où puisque  $u_n = 2,5 - v_n$  :  
Quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$ .
  - c. On sait que quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0,9^n < 1$ , car  $-1 < 0,9 < 1$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$ , donc  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2,5 < 3$ .  
Conclusion : à aucun moment le traitement ne sera dangereux pour le patient.

## Partie B : modèle continu de la quantité médicamenteuse

$$f(t) = 2,5 - 1,5e^{-0,2t},$$

1.  $3 \text{ h } 45 \text{ min} = 3 + \frac{45}{60} = 3 + \frac{3}{4} = 3 + \frac{75}{100} = 3 + 0,75 = 3,75.$

On a donc  $f(3,75) = 2,5 - 1,5e^{-0,2 \times 3,75} = 2,5 - 1,5 \times e^{-0,75} \approx 1,791 < 1,8$ . Le traitement n'est pas efficace au bout de 3 h 45 min.

2. Il faut trouver  $t$  tel que  $f(t) \geq 1,8$ , soit

$$2,5 - 1,5e^{-0,2t} \geq 1,8 \iff 0,7 \geq 1,5e^{-0,2t} \iff \frac{7}{15} \geq e^{-0,2t}, \text{ soit par croissance du logarithme :}$$

$$\ln \frac{7}{15} \geq -0,2t \iff -5 \ln \frac{7}{15} \leq -5 \times (-0,2t) \text{ car } -5 < 0, \text{ soit enfin } t \geq -5 \ln \frac{7}{15}.$$

Or  $-5 \ln \frac{7}{15} \approx 3,8107$  soit 3 h et  $0,8107 \times 60 = 48,64$  min soit environ 3 h 49 min.

3. Ce temps est inférieur à celui de la question 4. b. La perfusion est donc plus rapidement efficace.