

TS SPE CORRIGE BAC BLANC 1

Question 1 :

On considère la fonction g définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.

Pour tout nombre réel x strictement positif :

a. $g'(x) = \frac{1}{2x+1}$

b. $g'(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

c. $g'(x) = \ln(2x+1)$

d. $g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

Question 2 :

La fonction $x \mapsto \ln(-x^2 - x + 6)$ est définie sur :

a. $] -3; 2[$

b. $] -\infty; 6]$

c. $] 0; +\infty[$

d. $] 2; +\infty[$

Question 3 :

On considère la fonction f définie sur $]0,5; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x - 1)$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

a. $y = 4x - 7$

b. $y = 2x - 4$

c. $y = -3(x - 1) + 4$

d. $y = 2x - 1$

Question 4 :

L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$ est :

a. $S =]1; +\infty[$

b. $S =]-1; 1[$

c. $S = \emptyset$

d. $S =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$

Question 5 :

La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2\ln(x)}{3x^2+1}$ est égale à :

a. $\frac{2}{3}$

b. $+\infty$

c. $-\infty$

d. 0

Question 6 :

Soit la fonction g définie pour tout réel x strictement positif par $g(x) = x\ln(x) - x^2$.

On note C_g sa courbe représentative dans un repère du plan.

a. La fonction g est convexe sur $]0; +\infty[$

b. La fonction g est concave sur $]0; +\infty[$

c. La courbe C_g admet exactement un point d'inflexion sur $]0; +\infty[$

d. La courbe C_g admet exactement deux points d'inflexion sur $]0; +\infty[$

Question 7 :

L'équation $e^{2x} + e^x - 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a. trois solutions

b. deux solutions

c. une seule solution

d. aucune solution

Avec une calculatrice, on entre les fonctions et on peut conjecturer sans difficulté les réponses.

Exercice 2 :

Partie A :

1. a. La fonction f est dérivable sur $[0 ; 10]$.

En utilisant les règles de dérivation d'un produit, on obtient :

$$f'(t) = 3e^{-0,5t+1} + 3t \times (-0,5)e^{-0,5t+1} = 3(1 + t \times (-0,5))e^{-0,5t+1} = 3(-0,5t + 1)e^{-0,5t+1}$$

Pour $t \in [0; 10]$, $e^{-0,5t+1} > 0$ donc $f'(t)$ a le même signe que $(-0,5t + 1)$.

$$-0,5t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 0,5t \Leftrightarrow \frac{1}{0,5} \geq t \Leftrightarrow t \leq 2.$$

D'où le tableau de variation de f :

x	0	2	10	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	6	$30e^{-4}$	

Le maximum de la fonction f est atteint pour $t=2$, et $f(2) = 6$.

La quantité maximale est de 6mg et sera atteinte au bout de 2 heures.

2. a.

Sur l'intervalle $[0 ; 2]$:

- la fonction f est continue car dérivable
- la fonction f est strictement croissante
- la fonction f est à valeurs dans $[0 ; 6]$ et $5 \in [0 ; 6]$

donc d'après le corollaire du TVI (théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[0 ; 2]$.

À la calculatrice, $\alpha \approx 1,02$.

b. D'après le tableau de variations, $f(t) \geq 5 \Leftrightarrow t \in [\alpha; \beta]$.

De plus, $\beta - \alpha = 2,44$ (heures).

Donc le traitement sera efficace pendant 2,44 heures soit environ 146 minutes.

Partie B :

1. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 %, donc il en reste 70 %. Puis on en injecte à nouveau 1,8 mg.

Sachant que $u_0 = 2$, alors $u_1 = 0,70 \times 2 + 1,8 = 3,2$.

Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang sera de 3,2 mg

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. u_n désigne la quantité de médicament dans le sang au bout de n heures.

Une heure plus tard, il ne restera que 70 % de la quantité précédente soit 70 % de u_n , puis on en ajoute 1,8 mg par injection, donc il y aura $0,7 \times u_n + 1,8$; Or une heure plus tard la quantité de médicament est de u_{n+1} , donc $u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 1,8$

3. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit la propriété : « $u_n \leq u_{n+1} < 6$ »

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$. Donc $u_0 \leq u_1 < 6$.

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \leq u_{n+1} < 6$ (H.R.)
montrons que $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6$

On a $u_n \leq u_{n+1} < 6$

donc $0,7 \times u_n \leq 0,7 \times u_{n+1} < 0,7 \times 6$ (en multipliant par $0,7 > 0$)

donc $0,7 \times u_n \leq 0,7 \times u_{n+1} < 4,2$

donc $0,7 \times u_n + 1,8 \leq 0,7 \times u_{n+1} + 1,8 < 4,2 + 1,8$

donc $0,7 \times u_n + 1,8 \leq 0,7 \times u_{n+1} + 1,8 < 6$

donc $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6$

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. Le principe de récurrence s'applique et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} < 6$.

b. Nous venons de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} < 6$.

Cela signifie que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6.

Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée ℓ , et $\ell \leq 6$.

c. La suite (u_n) converge vers ℓ donc ℓ est l'unique solution de l'équation $\ell = 0,7\ell + 1,8$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,7 u_n + 1,8 = 0,7\ell + 1,8$.

$\ell = 0,7\ell + 1,8 \Leftrightarrow 0,3\ell = 1,8 \Leftrightarrow \ell = 6$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = -u_n + 6$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$v_{n+1} = -u_{n+1} + 6 = -(0,7u_n + 1,8) + 6 = -0,7u_n + 4,2 = 0,7(-u_n + \frac{4,2}{0,7}) = 0,7(-u_n + 6) = 0,7v_n$ Donc

la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7 et de premier terme $v_0 = -u_0 + 6 = 4$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0,7^n$.

De plus, $v_n = -u_n + 6$ donc $u_n = -v_n + 6 = 6 - 4 \times 0,7^n$.

c. $u_n \geq 5,5 \Leftrightarrow 6 - 4 \times 0,7^n \geq 5,5 \Leftrightarrow -4 \times 0,7^n \geq -0,5 \Leftrightarrow 0,7^n \leq \frac{-0,5}{-4} \Leftrightarrow \ln(0,7^n) \leq \ln \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow n \times \ln(0,7) \leq -\ln(8) \Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln(8)}{\ln(0,7)}$ car $\ln(0,7) < 0$

À la calculatrice : $\frac{-\ln(8)}{\ln(0,7)} \approx 5,83$ donc $n \geq 6$. Cela signifie que $u_6 \geq 5,5$.

Il faudra donc au total 7 injections.

(injection initiale $u_0 = 2$ mg et les 6 autres injections de u_1 à u_6 de 1,8 mg)

Exercice 3 :

Partie A

1. Recopier et compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes.

	A	$\bar{A}$	Total
B	0,05	0,15	0,2
$\bar{B}$	0,05	0,75	0,8
Total	0,1	0,9	1

2. a. On a $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,1 = 0,9$; $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,2 = 0,8$.

Donc $P(A \cap \bar{B}) = 0,8 - 0,75 = 0,05$ et $P(B \cap \bar{A}) = 0,9 - 0,75 = 0,15$.

Donc la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts est égale à : $P(A \cap B) = 0,1 - P(A \cap \bar{B})$ (voir colonne A)
 $= 0,1 - 0,05 = 0,05$.

b. $P(A) \times P(B) = 0,1 \times 0,2 = 0,02$ et $P(A \cap B) = 0,05$.

On a donc $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$: les événements A et B ne sont pas indépendants.

c. L'événement « une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2 » est $A \cup B$, et c'est l'événement contraire de l'événement « une paire de verres ne présente aucun des deux défauts », qui est $\bar{A} \cap \bar{B}$.

On a donc $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,75 = 0,25$.

(On peut aussi utiliser $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$)

3. On a $P(A \cap \bar{B}) + P(B \cap \bar{A}) = 0,05 + 0,15 = 0,2$

4. On a $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,05}{0,1} = 0,5$.

Partie B

1. La production est suffisamment importante pour que l'expérience puisse être assimilée à une répétition de $n = 50$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, chaque épreuve ayant pour succès S : « la paire de verre présente un défaut pour le traitement T1 » de probabilité $p = 0,1$.

X compte le nombre de succès lors de cette répétition, c'est-à-dire le nombre de paires de verres qui présente le défaut pour le traitement T1 .

Dans ces conditions, X suit donc la loi binomiale $B(n ; p)$ avec $n = 50$ et $p = 0,1$.

2. On a : $P(X=10) = \binom{50}{10} \times 0,1^{10} \times (1 - 0,1)^{50-10}$.

La calculatrice donne $P(X=10) \approx 0,015$ au millième près.

3. $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0,888$

4. On a : $E(X) = n \times p = 50 \times 0,1 = 5$.

En moyenne, on peut donc espérer trouver 5 paires de verres ayant ce défaut T_1 , dans un échantillon de 50 paires.

Exercice 4 :

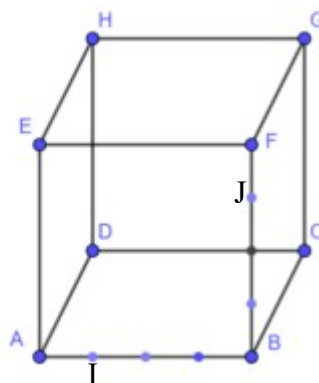
ABCDEFGH est un cube de côté 4.

Partie A

On définit les points I et J par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BF}.$$

1. Placer les points I et J sur la figure.
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.
3. Montrer que les droites (IJ) et (DG) sont parallèles.



Partie B

L'espace est rapporté au repère $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$.

1. Donner, sans justification, les coordonnées des huit sommets du cube, ainsi que les coordonnées des points I et J définis dans la partie A.
2. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (IJ).
b. Donner une représentation paramétrique de la droite (HB).
c. Les droites (IJ) et (HB) sont-elles coplanaires ? Justifier.
3. Soit K le centre de la face BCGF.
a. Donner, sans justification, les coordonnées de K.
b. Déterminer une équation paramétrique de la droite (d), parallèle à (IJ) et passant par K.
c. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L de la droite (d) et du plan (ADE).

2. On a $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$

Or $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$

Donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DH}$ (car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH}$)

Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

3. De $\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$, on déduit que $\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AF}$ (relation de Chasles)

et puisque $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG}$, alors ADGF est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG}$

d'où $\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DG}$

Donc les droites (IJ) et (DG) sont parallèles.

Partie B

L'espace est rapporté au repère $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où : $\vec{i} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AE}$

1. A(0 ; 0 ; 0) ; B(4 ; 0 ; 0) ; C(4 ; 4 ; 0) ; D(0 ; 4 ; 0) ;
E(0 ; 0 ; 4) ; F(4 ; 0 ; 4) ; G(4 ; 4 ; 4) ; H(0 ; 4 ; 4) ;
I(1 ; 0 ; 0) et J(4 ; 0 ; 3)

2. a. On a I(1 ; 0 ; 0) et $\overrightarrow{IJ}(3 ; 0 ; 3)$ est colinéaire à $\vec{u}(1 ; 0 ; 1)$

Une représentation paramétrique de (IJ) est donc :
$$\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- b. On a H(0 ; 4 ; 4) et $\overrightarrow{HB}(4 ; -4 ; -4)$ est colinéaire à $\vec{v}(1 ; -1 ; -1)$

Une représentation paramétrique de (HB) est donc :
$$\begin{cases} x=t \\ y=4-t \\ z=4-t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- c. $\overrightarrow{IJ}(3 ; 0 ; 3)$

$\overrightarrow{HB}(4 ; -4 ; -4)$ Puisque $\frac{3}{4} \neq \frac{0}{-4}$, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{HB}$ ne sont pas colinéaires.

Donc les droites (IJ) et (HB) ne sont pas parallèles.

Cherchons l'intersection de ces droites.

$$\begin{cases} x=1+t=t' \\ y=0=4-t' \\ z=t=4-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+0=4 \\ t'=4 \\ t=0 \end{cases} \quad \text{impossible}$$

Donc les droites ne sont pas sécantes

Conclusion : les droites ne sont pas coplanaires.

3. a. K(4 ; 2 ; 2)

- b. (d) passe par K(4 ; 2 ; 2) et est parallèle à (IJ) donc (d) est de vecteur directeur $\overrightarrow{IJ}(3 ; 0 ; 3)$ colinéaire à $\vec{u}(1 ; 0 ; 1)$.

Une représentation paramétrique de (d) est donc :
$$\begin{cases} x=4+t \\ y=2 \\ z=2+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- c. Le plan (ADE) a pour équation $x = 0$

$$M(x ; y ; z) \in (d) \cap (ADE) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0=4+t \\ y=2 \\ z=2+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ et } t=-4 \\ y=2 \\ z=-2 \end{cases}$$

Donc le point d'intersection de (d) et (ADE) est L(0 ; 2 ; -2)