

FONCTIONS POLYNOMES DE DEGRE 2

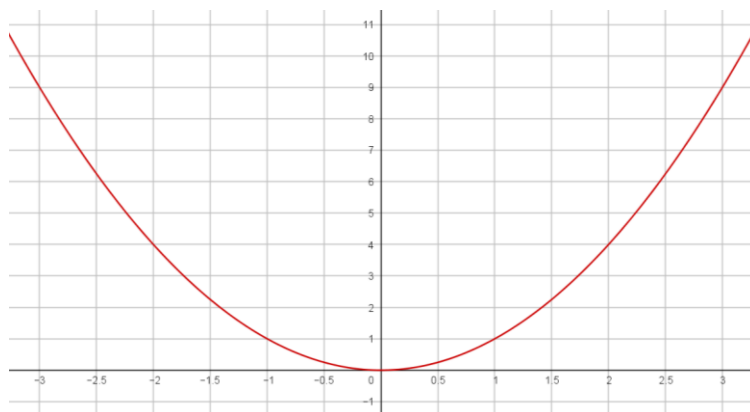
1) Rappel : la fonction carré.

La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

a) Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

b) Courbe représentative :



Sa représentation graphique est une parabole de sommet $S(0; 0)$.

La courbe admet un axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées.

c) Sens de variation de la fonction carré

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de f			

La fonction carré est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$
et strictement croissante sur $[0 ; +\infty [$.

Le minimum de la fonction carré est 0.

Il est atteint pour $x = 0$.

d) Signe de la fonction carré :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f(x)$	+	0	+

Pour tout x réel, $x^2 \geq 0$.

La fonction carré est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

e) Parité :

On remarque que $(-2)^2 = 4 = 2^2$; $(-5)^2 = 25 = 5^2$

L'image par la fonction carré d'un nombre et de son opposé sont identiques.

$(-x)^2 = x^2$ On dira que la fonction carré est paire.

Toutes les fonctions paires ont l'axe des ordonnées comme axe de symétrie pour leur courbe représentative.

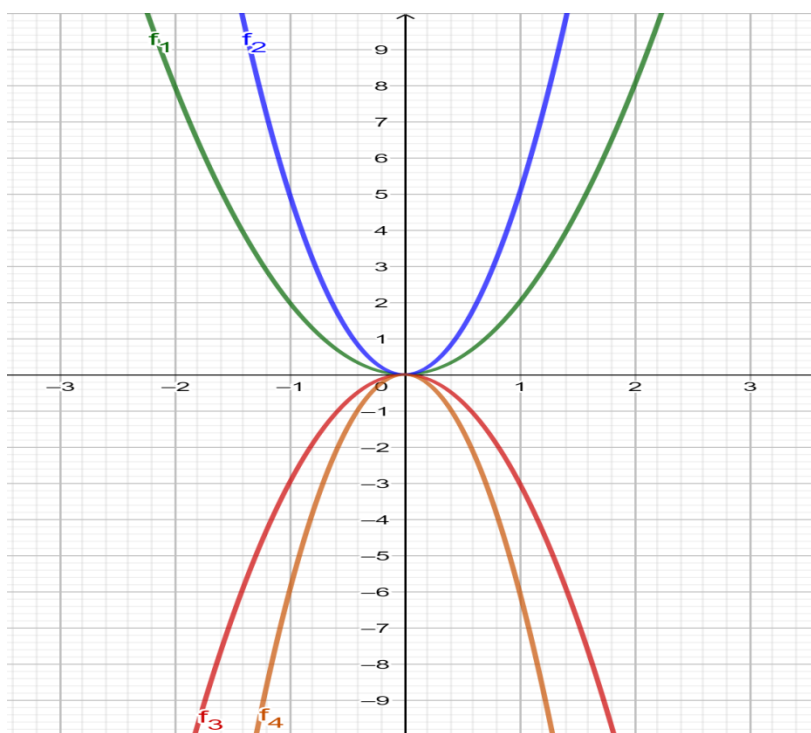
2) Les fonctions du type $f(x) = ax^2$

a) $f_1(x) = 2x^2$; $f_2(x) = 5x^2$; $f_3(x) = -3x^2$; $f_4(x) = -4x^2$

Compléter le tableau suivant :

x	- 2	- 1	0	1	2
$f_1(x)$	8	2	0	2	8
$f_2(x)$	20	5	0	5	20
$f_3(x)$	-12	-3	0	-3	-12
$f_4(x)$	-16	-4	0	-4	-16

Représenter sur le même graphique les fonctions f_1 , f_2 , f_3 et f_4 :



b) Constatations :

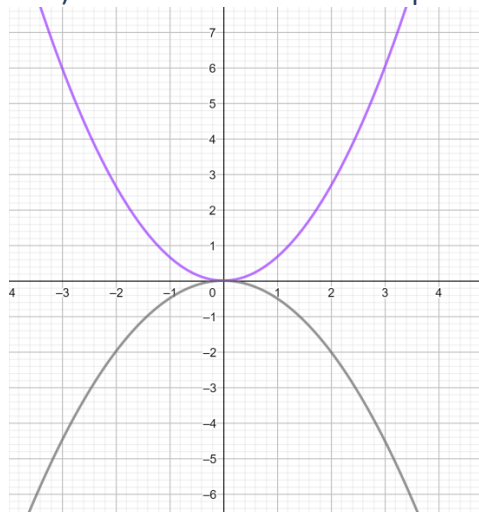
Les courbes admettent un **axe de symétrie** : l'axe des ordonnées.

Elles passent par l'origine du repère, le point $(0 ; 0)$.

Si a est positif, la parabole est tournée **vers le haut**

Si a est négatif, la parabole est tournée **vers le bas**

c) Retrouver les fonctions représentées sur le graphique :



La parabole violette est tournée vers le haut, elle admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie et elle passe par $(0 ; 0)$.

Elle représente donc une fonction f du type $f(x) = ax^2$ avec $a > 0$.

Elle passe par le point $A(3 ; 6)$ donc $f(3) = 6$

$$f(3) = a \times 3^2 \text{ donc } 6 = a \times 9 \text{ donc } a = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ donc } f(x) = \frac{2}{3}x^2.$$

La parabole noire est tournée vers le bas, elle admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie et elle passe par $(0 ; 0)$.

Elle représente donc une fonction g du type $g(x) = ax^2$ avec $a < 0$.

Elle passe par le point $B(2 ; -2)$ donc $g(2) = -2$

$$g(2) = a \times 2^2 \text{ donc } -2 = a \times 4 \text{ donc } a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ donc } g(x) = -\frac{1}{2}x^2.$$

3) Les fonctions du type $g(x) = ax^2 + b$

Si $a = 1$ et $b = 0$ on retrouve la fonction carré.

a) Quelques exemples :

Pour chaque valeur de a et b suivantes:

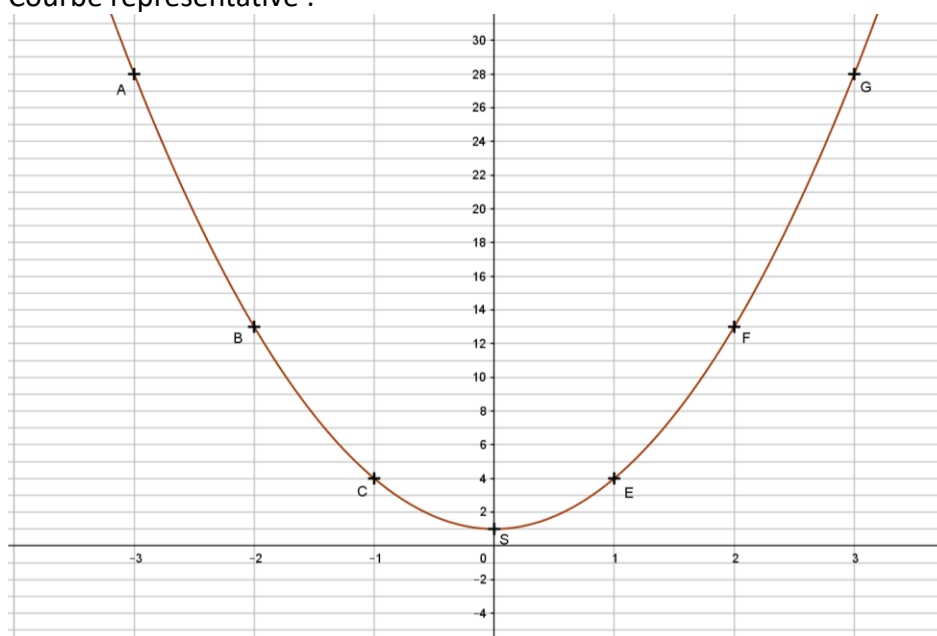
- Ecrire la fonction g correspondante.
- Compléter le tableau de valeurs
- Tracer la courbe représentative, donner son axe de symétrie et les coordonnées de son sommet. Préciser les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées.
- Compléter le tableau de variations
- Compléter le tableau de signes.

➤ **$a = 3$ et $b = 1$** $g(x) = 3x^2 + 1$

Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	28	13	4	1	4	13	28

Courbe représentative :



Axe de symétrie : **axe des ordonnées**

Coordonnées du sommet : **$S(0; 1)$**

Intersections avec l'axe des abscisses : **Il n'y en a pas**

Intersections avec l'axe des ordonnées : **$y = 1$**

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de g			

Tableau de signes :

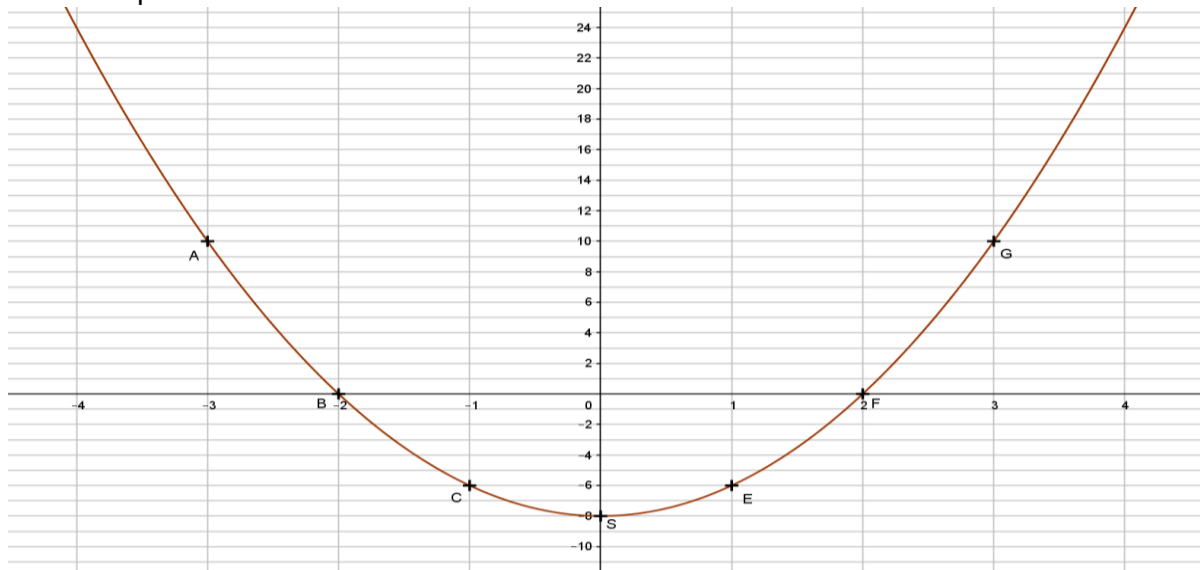
x	$-\infty$	$+\infty$
signes de $g(x)$	+	

➤ $a = 2$ et $b = -8$ $g(x) = 2x^2 - 8$

Tableau de valeurs :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
g(x)	24	10	0	-6	-8	-6	0	10	24

Courbe représentative :



Axe de symétrie : **axe des ordonnées**

Coordonnées du sommet : **S (0 ; -8)**

Intersections avec l'axe des abscisses : **$x = -2$ et $x = 2$ ou A(-2 ; 0) et B(2 ; 0)**

Intersections avec l'axe des ordonnées : **$y = -8$ ou S(0 ; -8)**

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de g			

Tableau de signes :

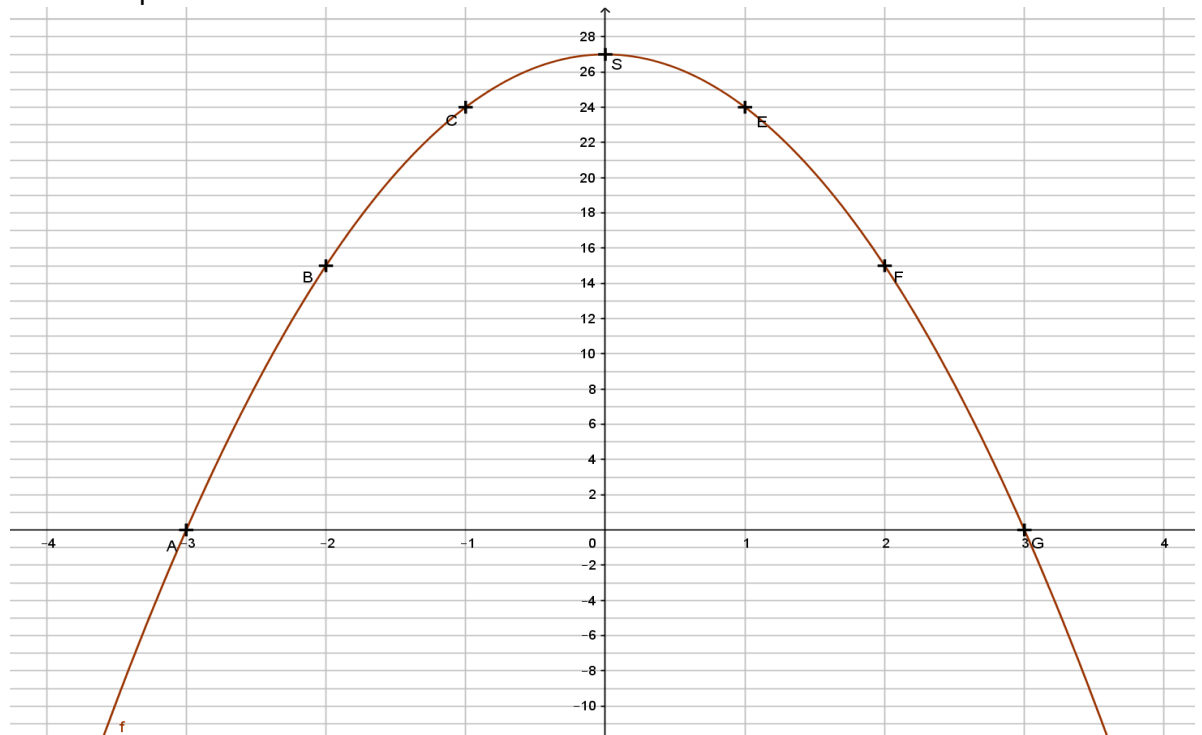
x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
signes de g(x)	+	0	-	0	+

➤ $a = -3$ et $b = 27$ $g(x) = -3x^2 + 27$

Tableau de valeurs :

x	-3,5	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
g(x)	-9,75	0	15	24	27	24	15	0	-21

Courbe représentative :



Axe de symétrie : axe des ordonnées

Coordonnées du sommet : $S(0; 27)$

Intersections avec l'axe des abscisses : $x = -3$ et $x = 3$ ou $A(-3; 0)$ et $G(3; 0)$

Intersections avec l'axe des ordonnées : $y = 27$ ou $S(0; 27)$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de g			

Tableau de signes :

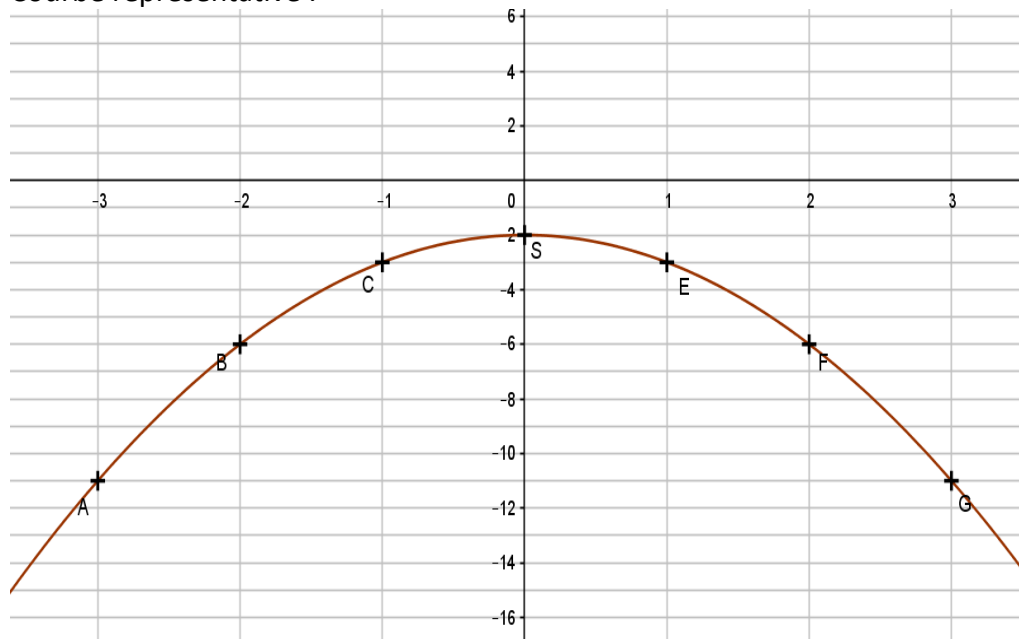
x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$	
signes de g(x)	-	0	+	0	-

➤ $a = -1$ et $b = -2$ $g(x) = -x^2 - 2$

Tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2
g(x)	-6	-3	-2	-3	-6

Courbe représentative :



Axe de symétrie : **axe des ordonnées**

Coordonnées du sommet : **S (0 ; - 2)**

Intersections avec l'axe des abscisses : **aucune**

Intersections avec l'axe des ordonnées : **y = - 2 ou S(0 ; -2)**

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de g			

Tableau de signes :

x	$-\infty$	$+\infty$
signes de g(x)	-	

b) A retenir :

$$g(x) = ax^2 + b$$

- g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
- C'est un polynôme de degré 2 ou un trinôme.
- g est représentée par une parabole, dont l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées et le sommet S a pour coordonnées $(0; b)$.
- La fonction g est donc paire.
- Le sens de variation de g dépend du signe de a .

Si $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de g			

La parabole est tournée vers le haut.
La fonction g admet un minimum de valeur b atteint en $x = 0$.

Si $a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de g			

La parabole est tournée vers le bas.
La fonction g admet un maximum de valeur b atteint en $x = 0$.

c) Associer une courbe à une fonction du type $g(x) = ax^2 + b$:

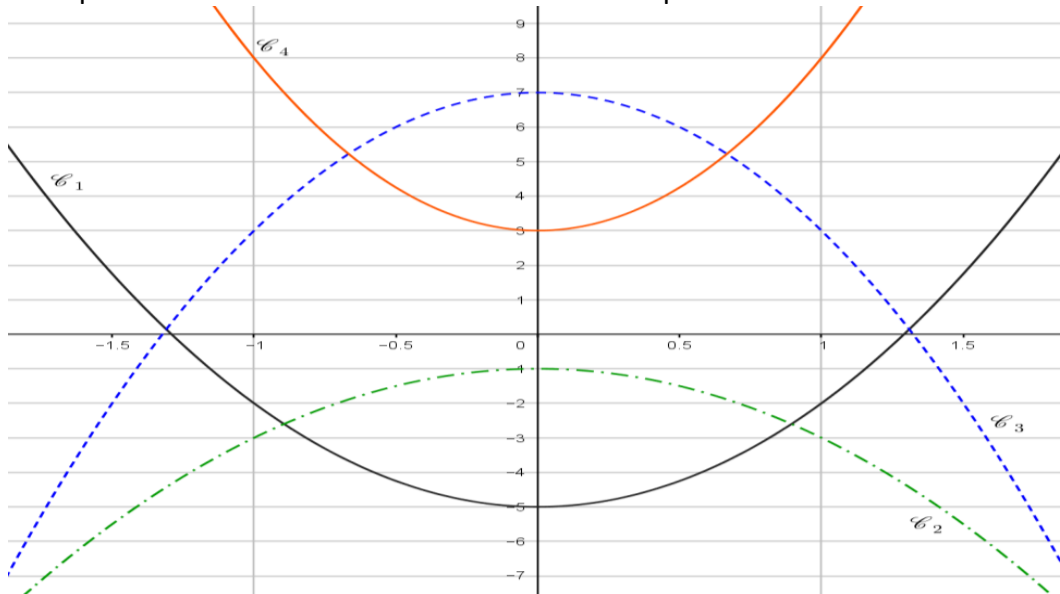
La courbe doit être une parabole ayant pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.

L'ordonnée du sommet est égale à b .

Si la parabole est tournée vers le haut, a est positif. Si elle est tournée vers le bas, a est négatif.

$g(1) = a + b$ donc il suffit de lire la valeur de $g(1)$ pour trouver a .

Exemples : Retrouver les fonctions associées à ces paraboles :



Pour C_1 la courbe est une parabole qui admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Elle passe par $S(0; -5)$ donc $b = -5$. Donc $f_1(x) = ax^2 - 5$.

Je choisis $M_1(1; -2)$ donc $f_1(1) = -2$

$$f_1(1) = a \times 1 - 5 = a - 5 \text{ donc } a - 5 = -2 \Leftrightarrow a = 3 \text{ donc } f_1(x) = 3x^2 - 5.$$

Pour C_2 la courbe est une parabole qui admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Elle passe par $S(0; -1)$ donc $b = -1$. Donc $f_2(x) = ax^2 - 1$.

Je choisis $M_2(1; -3)$ donc $f_2(1) = -3$

$$f_2(1) = a \times 1 - 1 = a - 1 \text{ donc } a - 1 = -3 \Leftrightarrow a = -2 \text{ donc } f_2(x) = -2x^2 - 1.$$

Pour C_3 la courbe est une parabole qui admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Elle passe par $S(0; 7)$ donc **$b = 7$** . Donc $f_3(x) = ax^2 + 7$.

Elle passe par $M_3(1; 3)$ donc $f_3(1) = 3$

$f_3(1) = a \times 1 + 7 = a + 7$ donc $a + 7 = 3 \Leftrightarrow a = -4$ donc **$f_3(x) = -4x^2 + 7$** .

Pour C_4 la courbe est une parabole qui admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Elle passe par $S(0; 3)$ donc **$b = 3$** . Donc $f_4(x) = ax^2 + 3$.

Elle passe par $M_4(1; 8)$ donc $f_4(1) = 8$

$f_4(1) = a \times 1 + 3 = a + 3$ donc $a + 3 = 8 \Leftrightarrow a = 5$ donc **$f_4(x) = 5x^2 + 3$** .

4) Les fonctions du type $h(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

a) Quelques exemples :

Pour chacune des fonctions suivantes:

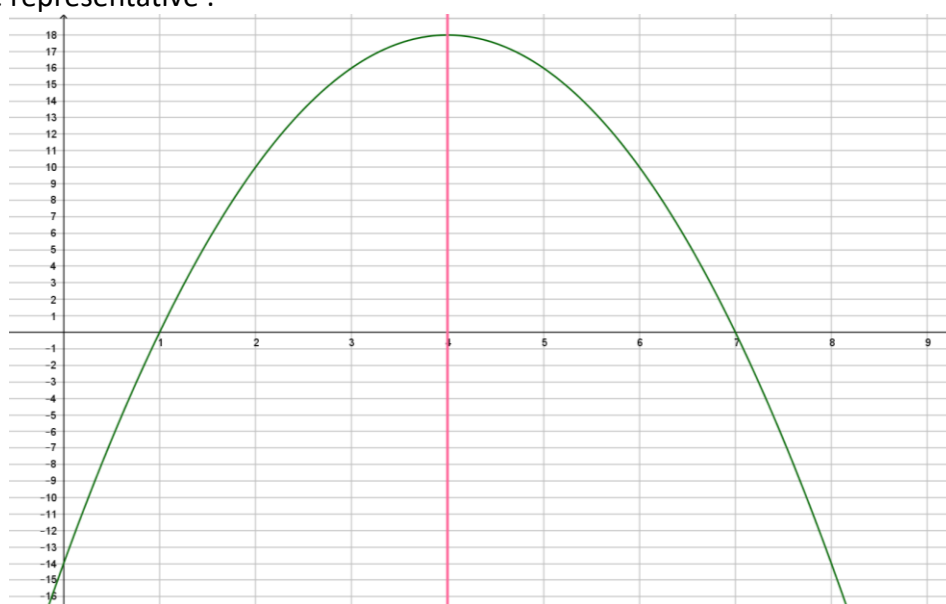
- Compléter le tableau de valeurs
- Tracer la courbe représentative, donner son axe de symétrie et les coordonnées de son sommet. Préciser les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées.
- Compléter le tableau de variations et le tableau de signes.

➤ $h(x) = -2(x - 7)(x - 1)$

Tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
h(x)	-14	0	10	16	18	16	10	0	-14

Courbe représentative :



Axe de symétrie : la droite verticale d'équation $x = 4$

Coordonnées du sommet : $S(4; 18)$

Intersections avec l'axe des abscisses : $x = 1$ et $x = 7$

Intersections avec l'axe des ordonnées : $y = -14$

➤ Forme développée : $-2(x - 7)(x - 1) = -2(x^2 - x - 7x + 7) = -2x^2 + 16x - 14$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
variations de h			

Tableau de signes :

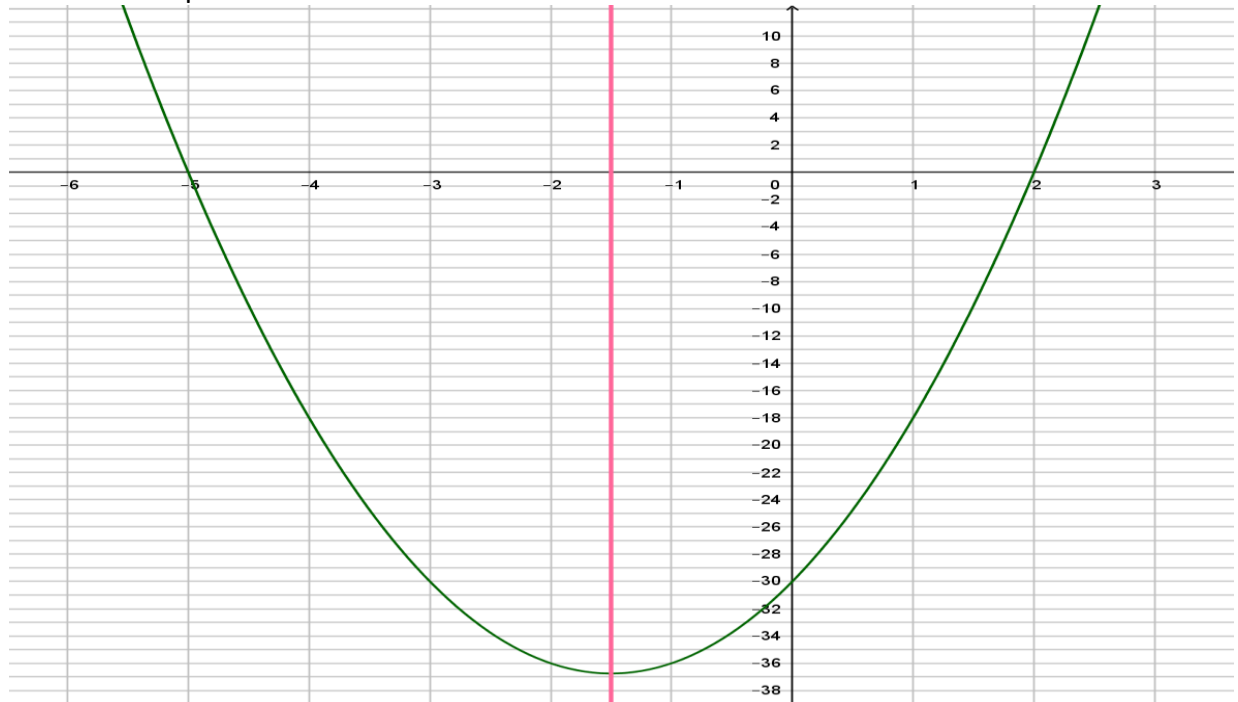
x	$-\infty$	1	7	$+\infty$	
signes de h(x)	-	0	+	0	-

➤ $h(x) = 3(x - 2)(x + 5) = 3(x - 2)(x - (-5))$

Tableau de valeurs :

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	-1,5
h(x)	24	0	-18	-30	-36	-36	-30	-18	0	24	-36,75

Courbe représentative :



Axe de symétrie : la droite verticale d'équation $x = -1,5$

Coordonnées du sommet : $S(-1,5 ; -36,75)$

Intersections avec l'axe des abscisses : $x = 2$ et $x = -5$

Intersections avec l'axe des ordonnées : $y = -30$

➤ Forme développée : $3(x - 2)(x + 5) = 3(x^2 + 5x - 2x - 10) = 3x^2 + 9x - 30$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$-1,5$	$+\infty$
variations de h			

Tableau de signes :

x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$	
signes de h(x)	+	0	-	0	+

b) A retenir :

$$h(x) = a (x - x_1) (x - x_2)$$

➤ h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

➤ C'est un polynôme de degré 2 ou un trinôme.

En effet $a (x - x_1) (x - x_2)$ est la forme factorisée d'un polynôme de degré 2.

ATTENTION : Tous les polynômes de degré 2 ne sont pas factorisables.

Pour ceux qui ne seront pas factorisables, la courbe ne coupera pas l'axe des abscisses.

➤ h est représentée par une parabole, tournée vers le haut si a est positif, tournée vers le bas si a est négatif, et dont l'axe de symétrie est l'axe vertical passant par le milieu de x_1 et x_2 .

➤ Le sens de variation de h dépend du signe de a .

Si $a > 0$

x	$-\infty$	$\frac{x_1 + x_2}{2}$	$+\infty$
variations de h			

La parabole est tournée vers le haut.

La fonction h admet un minimum

atteint en $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Si $a < 0$

x	$-\infty$	$\frac{x_1 + x_2}{2}$	$+\infty$
variations de h			

La parabole est tournée vers le bas.

La fonction h admet un maximum

atteint en $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

➤ La parabole coupe l'axe des ordonnées en $x = x_1$ et en $x = x_2$.

En effet, pour déterminer les intersections d'une courbe avec l'axe des abscisses, on cherche les antécédents de 0 par la fonction donc on résout l'équation $h(x) = 0$.

$$\text{Or } h(x) = 0 \Leftrightarrow a (x - x_1) (x - x_2) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{ou } x - x_1 = 0 \quad \text{ou } x - x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{pas possible} \quad \quad \quad x = x_1 \quad \text{ou} \quad \quad x = x_2$$

Donc 0 a deux antécédents par h : $x = x_1$ et $x = x_2$.

x_1 et x_2 sont les deux valeurs qui annulent h , on dit que ce sont les **racines** de $h(x)$.

➤ Signe de $h(x)$:

Si $a > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
signes de h	+	0	-	0	+
	signe de a		signe de -a		signe de a

Si $a < 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
signes de h	-	0	+	0	-
	signe de a		signe de -a		signe de a

➤ **CAS PARTICULIER : $x_1 = x_2$**

$$\text{Alors } h(x) = a (x - x_1) (x - x_1) = h(x) = a (x - x_1)^2.$$

La courbe de la fonction h ne coupe l'axe des abscisses qu'en un seul point d'abscisse x_1 .

Signe de $h(x)$:

Si $a > 0$

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
signes de h	+	0	+
	signe de a		signe de a

Si $a < 0$

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
signes de h	-	0	-
	signe de a		signe de a

c) Associer une courbe à une fonction du type $h(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$:

La courbe doit couper l'axe des abscisses en deux points ce qui permet de trouver x_1 et x_2 .

Si la courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'en un seul point alors on a $x_1 = x_2$.

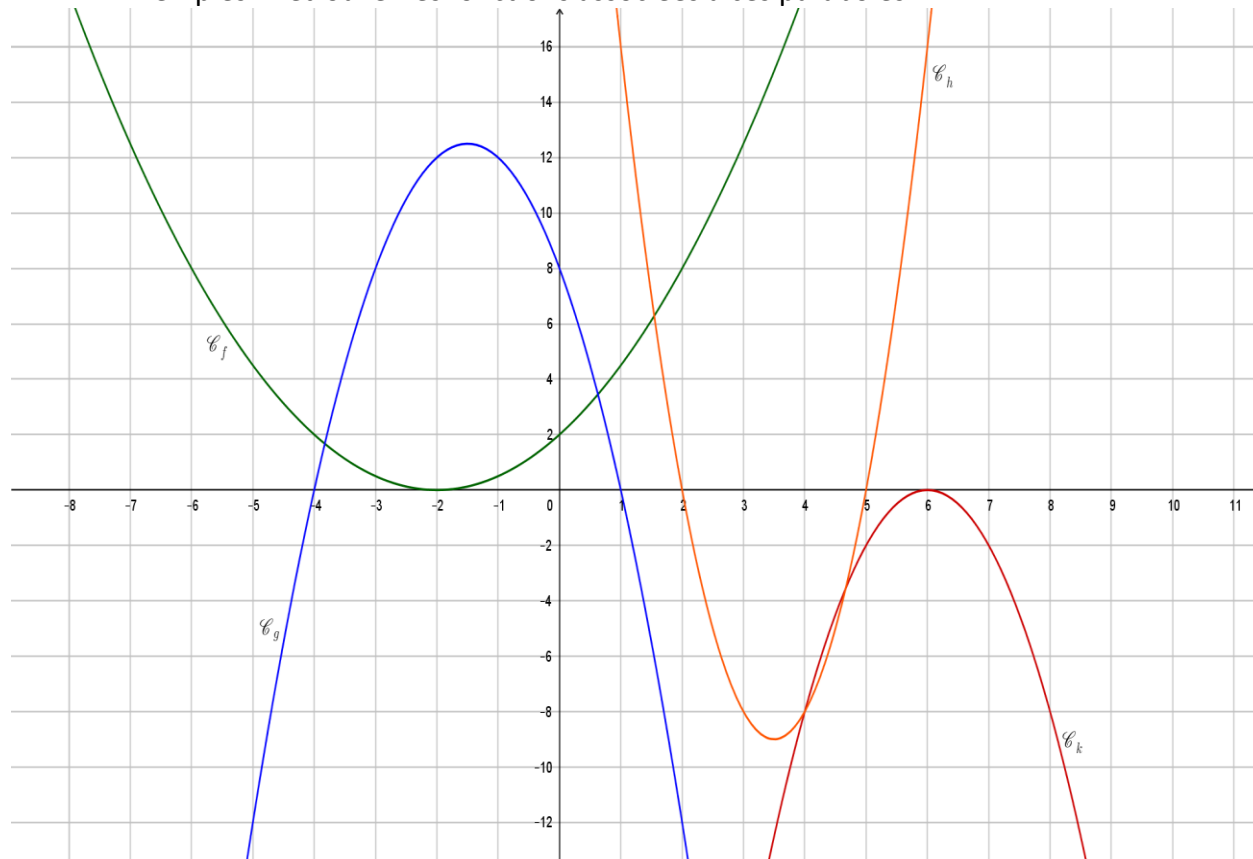
Si la parabole est tournée vers le haut, a est positif. Si elle est tournée vers le bas, a est négatif.

Pour trouver a , on choisit un point de la courbe.

Par exemple $M(x_M; y_M)$ et on écrit que $h(x_M) = y_M$.

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation pour trouver a .

Exemples : Retrouver les fonctions associées à ces paraboles :



La courbe C_f coupe une seule fois l'axe des abscisses en $x = -2$ donc $x_1 = x_2 = -2$ donc $f(x) = a(x + 2)^2$. De plus C_f passe par le point $M(0; 2)$ donc $f(0) = 2$

$$f(0) = a \times 2^2 = 4a \text{ donc } 4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ donc } f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2$$

La courbe C_g coupe deux fois l'axe des abscisses en $x_1 = -4$ et en $x_2 = 1$ donc $g(x) = a(x + 4)(x - 1)$. De plus C_g passe par le point $M(0; 8)$ donc $g(0) = 8$

$$g(0) = a \times 4 \times (-1) = -4a \text{ donc } -4a = 8 \Leftrightarrow a = -\frac{8}{4} = -2 \text{ donc } g(x) = -2(x + 4)(x - 1)$$

La courbe C_h coupe deux fois l'axe des abscisses en $x_1 = 2$ et en $x_2 = 5$ donc $h(x) = a(x - 2)(x - 5)$. De plus C_h passe par le point $M(3; -8)$ donc $h(3) = -8$

$$h(3) = a \times 1 \times (-2) = -2a \text{ donc } -2a = -8 \Leftrightarrow a = \frac{8}{2} = 4 \text{ donc } h(x) = 4(x - 2)(x - 5)$$

La courbe C_k coupe une seule fois l'axe des abscisses en $x = 6$ donc $x_1 = x_2 = 6$ donc $k(x) = a(x - 6)^2$. De plus C_k passe par le point $M(4; -8)$ donc $k(4) = -8$

$$k(4) = a \times (-2)^2 = 4a \text{ donc } 4a = -8 \Leftrightarrow a = -\frac{8}{4} = -2 \text{ donc } k(x) = -2(x - 6)^2$$

d) Déterminer le signe d'une fonction du type $h(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$:

Il faudra faire un tableau de signes :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
signe de a	signe de a		signe de a	signe de a	
signe de $x - x_1$	-	0	+	+	
signe de $x - x_2$	-	-	0	+	
signe de $h(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

Exemples :

➤ Déterminer le signe de $h(x) = 5(x + 4)(x - 1)$

Signe de $x + 4$:

$$x + 4 = 0 \quad x + 4 > 0$$

$$x = -4 \quad x > -4$$

Signe de $x - 1$:

$$x - 1 = 0 \quad x - 1 > 0$$

$$x = 1 \quad x > 1$$

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
signe de a= 5	+		+	+	
signe de x + 4	-	0	+	+	
signe de x - 1	-		0	+	
signe de h(x)	+	0	-	0	+

Donc $h(x)$ est positif sur $]-\infty; -4[\cup]1; +\infty[$

$h(x)$ est nul en $x = -4$ et $x = 1$

$h(x)$ est négatif sur $]-4; 1[$

➤ Déterminer le signe de $h(x) = -3(x + 5)^2$

Signe de $(x + 5)^2$: $x + 5 = 0$

$$x = -5$$

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
signe de $a = -3$	-		-
signe de $(x + 5)^2$	+	0	+
signe de $h(x)$	-	0	-

Donc $h(x)$ est négatif sur $]-\infty; -5[\cup]-5; +\infty[$

$h(x)$ est nul en $x = -5$