

I. Primitives d'une fonction

1) Equation différentielle

La description de nombreux phénomènes physiques peut être modélisée par une relation entre une fonction g et sa dérivée g' : rechercher une fonction g revient à résoudre une équation différentielle.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction g est une **solution de l'équation différentielle $y' = f$** sur I si et seulement si g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I , $g'(x) = f(x)$

Exemple : Soit l'équation différentielle $y' = 3x^2$, pour x élément de $\mathbb{R}$.
La fonction g telle que $g(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x , $g'(x) = 3x^2$
Donc g est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = 3x^2$.

2) Définitions et propriétés

a) Primitive d'une fonction f :

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Dire que F est une **primitive de f sur l'intervalle I** signifie que F est dérivable sur I et que $F' = f$ sur I .

b) Propriétés :

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F est une primitive de f sur I .

- Les fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ constituent l'ensemble de toutes les primitives de f sur I .
- Parmi toutes les primitives de f sur I , il en existe une seule telle que $G(x_0) = y_0$ avec x_0 un réel donné de l'intervalle I et y_0 un réel donné.

Démonstration :

Si $G(x) = F(x) + c$ pour $x \in I$ alors $G'(x) = F'(x) = f(x)$ donc G est une primitive de f sur I .

Réciproquement, si G est une primitive de f sur I alors pour tout x de I , $G'(x) = f(x)$.

Or F est une primitive de f sur I donc $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I .

Donc pour tout x de I , $(G - F)'(x) = 0$ donc la fonction $G - F$ est une fonction constante sur I .

Il existe donc un réel c tel que, pour tout x de I , $G(x) - F(x) = c$ donc $G(x) = F(x) + c$.

$G(x_0) = y_0$ peut s'écrire $F(x_0) + c = y_0$ donc $c = y_0 - F(x_0)$. On a donc $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$.

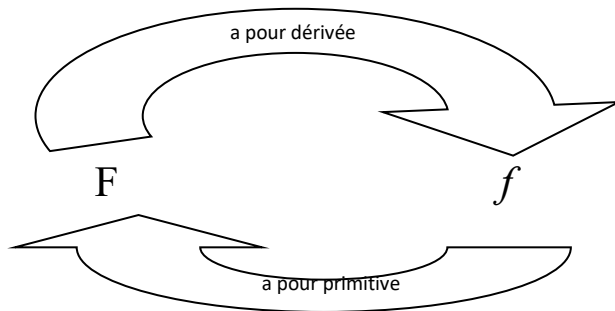
Le nombre $y_0 - F(x_0)$ étant fixé, la fonction G est alors unique.

- Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

II .Recherche des primitives d'une fonction :

1) Fonctions usuelles :

Ce tableau s'obtient par lecture inverse du tableau des dérivées.



Fonction f	Intervalle de définition	Primitive F
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, n > 1$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}, n > 1$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \sin x + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x + C, C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $]0; +\infty[$	$F(x) = \ln x + C, C \in \mathbb{R}$

2) Primitive de la somme de deux fonctions :

Si F est une primitive de f , si G est une primitive de g alors $F + G$ est une primitive de $f + g$.

Exemple : Soit h la fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + 2x$. Déterminer les primitives H de h sur $\mathbb{R}$.

$$h(x) = f(x) + g(x) \text{ avec } f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = 2x$$

$$H(x) = F(x) + G(x) \text{ avec } F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C_1, C_1 \in \mathbb{R} \text{ et } G(x) = x^2 + C_2, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$H(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C, C \in \mathbb{R}.$$

3) Primitive du produit d'une fonction par un réel :

Si F est une primitive de f sur I alors kF est une primitive de kf sur I avec $k \in \mathbb{R}$.

Exemple : Trouver les primitives de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 9x^5$.

$$g(x) = 9 \times f(x) \text{ avec } f(x) = x^5 \quad F(x) = \frac{1}{6}x^6 + C_1, C_1 \in \mathbb{R}.$$

$$G(x) = 9 \times F(x) = 9 \times \left(\frac{1}{6}x^6 + C_1\right) = \frac{3}{2}x^6 + C, C \in \mathbb{R}.$$

4) Primitive d'un produit de la forme $u' \times u^n$ avec u une fonction dérivable non nulle et $n \in \mathbb{Z}$:

➤ Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , si n est un nombre naturel,

alors les primitives de $u' \times u^n$ sont données par $\frac{1}{n+1} \times u^{n+1} + C, C \in \mathbb{R}$.

➤ Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , si n est un nombre naturel, $n \neq 1$,

alors les primitives de $\frac{u'}{u^n}$ sont données par $\frac{-1}{(n-1) \times u^{n-1}} + C, C \in \mathbb{R}$.

En particulier, si $n = 2$, les primitives de $\frac{u'}{u^2}$ sont $-\frac{1}{u} + C, C \in \mathbb{R}$.

Exemples :

a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x(x^2 + 1)^2$. Trouver les primitives F de f sur $\mathbb{R}$.

On remarque que f se présente comme un produit de deux fonctions.

Posons $u(x) = x^2 + 1$ alors $u'(x) = 2x$. On a alors $f(x) = u'(x) \times u^2(x)$.

$$\text{Donc } F(x) = \frac{1}{3}u^3(x) + C, C \in \mathbb{R}. \quad F(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + C, C \in \mathbb{R}.$$

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{6x^2}{(2x^3 - 4)^5}$. Trouver les primitives F de f sur $\mathbb{R}$.

On remarque que f se présente comme un quotient de deux fonctions.

Posons $u(x) = 2x^3 - 4$ alors $u'(x) = 6x^2$. On a alors $f(x) = \frac{u'(x)}{u^5(x)}$.

$$\text{Donc } F(x) = \frac{-1}{4u^4(x)} + C, C \in \mathbb{R}. \quad F(x) = \frac{-1}{4(2x^3 - 4)^4} + C, C \in \mathbb{R}.$$

c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x \times (\sin x)^7$. Trouver les primitives F de f sur $\mathbb{R}$.

On remarque que f se présente comme un produit de deux fonctions.

Posons $u(x) = \sin x$ alors $u'(x) = \cos x$. On a alors $f(x) = u'(x) \times u^7(x)$.

Donc $F(x) = \frac{1}{8} u^8(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. $F(x) = \frac{1}{8} (\sin x)^8 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

d) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sin x}{(\cos x)^4}$. Trouver les primitives F de f sur $\mathbb{R}$.

On remarque que f se présente comme un quotient de deux fonctions.

Posons $u(x) = \cos x$ alors $u'(x) = -\sin x$. On a alors $f(x) = -\frac{u'(x)}{u^4(x)}$.

Donc $F(x) = -\frac{-1}{3 u^3(x)} + C$, $C \in \mathbb{R}$. $F(x) = \frac{1}{3 (\cos x)^3} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

5) Tableau récapitulatif :

On suppose que f , g , h et u sont des fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Fonction f	Primitive F
$f(x) = a \times g(x) + b \times h(x)$ avec a, b réels	$F(x) = a \times G(x) + b \times H(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = u'(x) \times u^n(x)$ avec $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} u^{n+1}(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u^n(x)}$ avec $u(x) \neq 0$ et n entier, $n \geq 2$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1) u^{n-1}(x)} + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) \neq 0$	$F(x) = \ln(u(x)) + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ avec $u(x) > 0$	$F(x) = 2 \sqrt{u(x)} + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = u'(x) \times \cos(u(x))$	$F(x) = \sin(u(x)) + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = u'(x) \times \sin(u(x))$	$F(x) = -\cos(u(x)) + C$, $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$	$F(x) = e^{u(x)} + C$, $C \in \mathbb{R}$