

BACCALAURÉAT BLANC 2026

DE MATHÉMATIQUES

– SPÉCIALITÉ - MATHS –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES

Les calculatrices sont AUTORISÉES en mode examen actif

Coefficient : 16
Sujet 2

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est approximatif.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- ▶ *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ▶ *Le nom de votre professeur de Spécialité.*

Exercice 1 :

(7,5 points)

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.

Dans l'état d'Oklahoma, aux Etats-Unis, 70% des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose. Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97% des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95% des cas.

Partie A

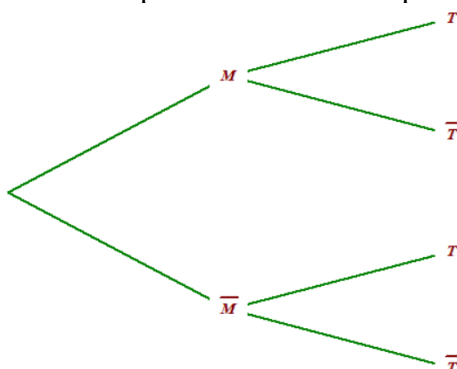
Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.

On considère les événements suivants :

M : " le coyote est malade " et T : " le test du coyote est positif "

On note respectivement $\bar{M}$ et $\bar{T}$ les événements contraires de M et T .

- 1) **Recopier** et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



- 2) Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.
- 3) Démontrer que la probabilité de T est égale à 0,694.
- 4) On appelle " valeur prédictive positive du test " la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.
Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.
- 5) a) Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la "valeur prédictive négative du test " et calculer cette valeur en arrondissant au millième.
b) Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test et interpréter.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de 0,694.

- 1) Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif
- a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.
- b) Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.
- c) Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.
- 2) Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à 0,99 ?

Exercice 2 :**(10,75 points)**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) + 1$.

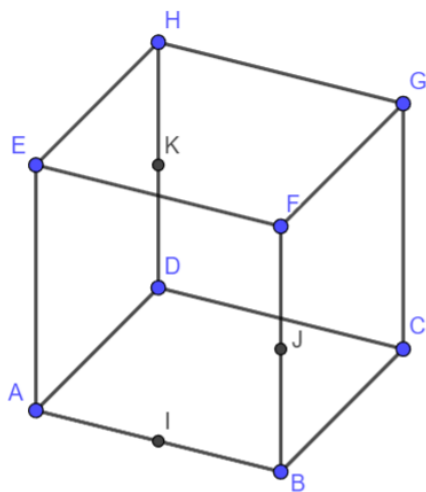
On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

- 1) Déterminer la limite de la fonction f en 0 et sa limite en $+\infty$.
- 2) a) On admet que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = 1 + \ln(x)$.
b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.
On y fera figurer la valeur exacte de l'extrémum de f sur $]0 ; +\infty[$ et les limites.
c) Justifier que pour tout $x \in]0 ; 1]$, $f(x) \in]0 ; 1]$.
- 3) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 1.
b) Etudier la convexité de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.
c) En déduire que pour tout réel x strictement positif, $f(x) \geq x$.
- 4) On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0 ; 1[$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $0 < u_n \leq 1$.
b) Déduire de la question 3)c) la croissance de la suite (u_n) .
c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 3 :**(8,75 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

ABCDEFGH est un cube. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF] et [DH].



Affirmation 1 : $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{IC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FJ}$

Affirmation 2 : Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont coplanaires.

Dans la suite, on se place dans le repère de l'espace $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On note (d) et (d') les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 3t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

Affirmation 3 : Une représentation paramétrique de la droite (JH) est : $\begin{cases} x = -2 - 2k \\ y = 3 + 2k \\ z = 2 + k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$

Affirmation 4 : Le point G est un point de la droite (d) .

Affirmation 5 : Les droites (d) et (d') sont coplanaires .

Exercice 4 :

(13 points)

Un médicament est administré par voie intraveineuse à un patient.

Partie A : modèle discret de la quantité médicamenteuse

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion. On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10% de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.

On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant :

pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

- 1) Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.
- 2) Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9 u_n + 0,25$.
- 3) a) Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} < 5$.
b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 4) On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.

- a) **Recopier** et compléter le script écrit en langage Python ci-contre de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

- b) Quelle est la valeur renvoyée par ce script ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def efficace() :  
    u = 1  
    n = 0  
    while ..... :  
        u = .....  
        n = .....  
    return(n)
```

- 5) Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 2,5 - u_n$.
 - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .
 - b) Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.
 - c) Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.
D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Partie B : modèle continu de la quantité médicamenteuse

Après une injection initiale de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.

Le débit de la substance médicamenteuse administrée au patient est de 0,5 mg par heure.

La quantité de médicament dans le sang du patient, en fonction du temps, est modélisée par la fonction f , définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 2,5 - 1,5 e^{-0,2t}$, où t désigne la durée de la perfusion exprimée en heure. On rappelle que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.

- 1) Le médicament est-il réellement efficace au bout de 3 h 45 min ?
- 2) Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps le médicament devient réellement efficace.
- 3) Comparer le résultat obtenu avec celui obtenu à la question 4.b) du modèle discret de la partie A.