

FICHE DE REVISIONS 2 Fonctions exponentielle

Temps : environ 1h par exercice

Exercice 1 :

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3 ; 4]$ une unique solution qui sera notée α .
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.

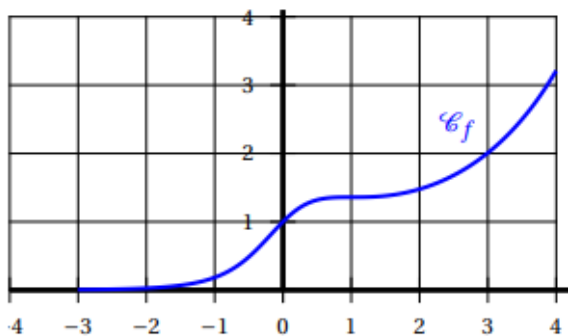
Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

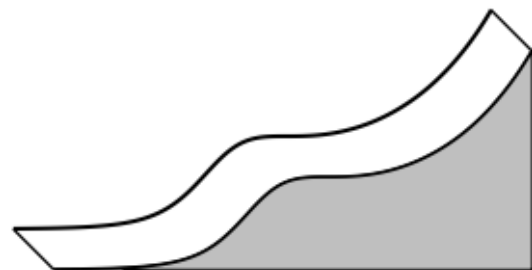
$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1.
 - a. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.
 - b. Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathcal{C}_f$



Vue de profil du toboggan

- a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.
- b. On admet que la fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f , a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$$

où p est la fonction définie dans la partie A.

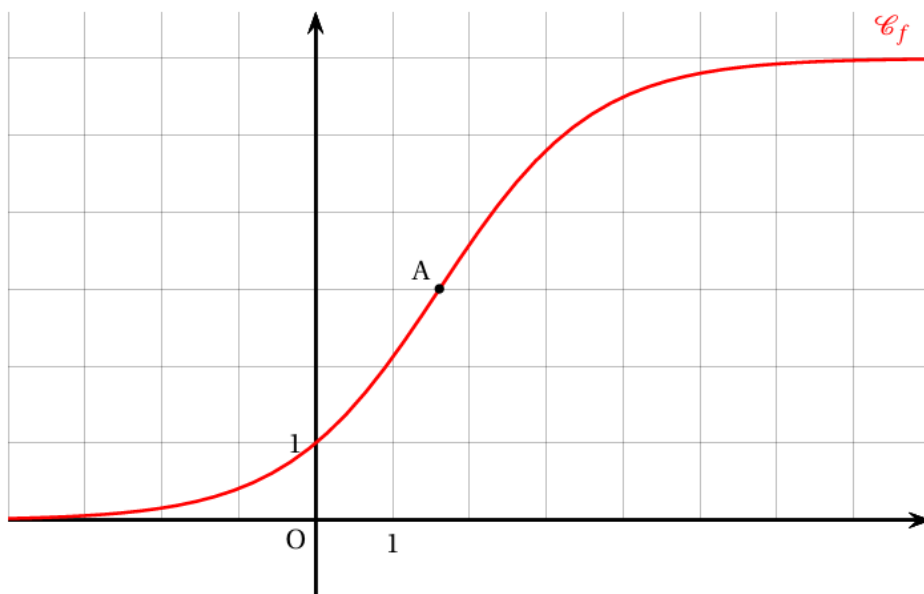
En utilisant l'expression précédente de f'' , répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{6}{1 + 5e^{-x}}$$

On a représenté sur le schéma ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f .



1. Montrer que le point A de coordonnées $(\ln 5 ; 3)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.
3. a. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = \frac{30e^{-x}}{(1 + 5e^{-x})^2}.$$

- b. En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
4. On admet que :
- f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f'' sa dérivée seconde ;
 - pour tout réel x ,
- $$f''(x) = \frac{30e^{-x}(5e^{-x} - 1)}{(1 + 5e^{-x})^3}.$$
- a. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. On montrera en particulier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion.
 - b. Justifier que pour tout réel x appartenant à $] -\infty ; \ln 5]$, on a : $f(x) \geq \frac{5}{6}x + 1$.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x \ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f' .

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0 ; +\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0 ; +\infty[$.

On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0 ; +\infty[$.

Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g .
Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.

Résoudre, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

2. Justifier que la suite (u_n) converge.

On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

3. Déterminer la valeur de ℓ .

Correction

Exercice 1 :

Partie A

1. La fonction p est continue et dérivable sur $[-3 ; 4]$.

$$\forall x \in [-3 ; 4], p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$$

Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ($\Delta = -24 < 0$) donc $\forall x \in [-3 ; 4], p'(x) > 0$.

Donc la fonction p est strictement croissante sur $[-3 ; 4]$.

2. $p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$

La fonction p est continue et strictement croissante sur $[-3 ; 4]$ à valeurs dans $[-68 ; 37]$. Or $0 \in [-68 ; 37]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[-3 ; 4]$.

3. À la calculatrice, $\alpha \approx -0,2$.

4. D'après les variations de la fonction p , et en utilisant le résultat précédent, on peut établir le tableau de signe de la fonction p sur $[-3 ; 4]$:

x	-3	α	4
$p(x)$	$-$	0	$+$

Partie B

1. a. La fonction f est continue et dérivable sur $[-3 ; 4]$ (car $\forall x \in [-3 ; 4], 1 + x^2 \neq 0$).

$$\forall x \in [-3 ; 4], f'(x) = \frac{e^x \times (1 + x^2) - e^x \times 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(1 + x^2)^2} = \frac{(x - 1)^2 e^x}{(1 + x^2)^2}.$$

$$\text{b. } f'(x) = 0 \iff \frac{(x - 1)^2 e^x}{(1 + x^2)^2} = 0 \iff (x - 1)^2 e^x \iff (x - 1)^2 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1.$$

Et $f(1) = \frac{e}{2}$. Donc au point d'abscisse 1, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale d'équation $y = \frac{e}{2}$.

2. a. Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction f est :

- convexe sur $[-3 ; 0]$;
- concave sur $[0 ; 1]$;
- convexe sur $[1 ; 4]$.

Donc $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion, aux abscisses $x = 0$ et $x = 1$.

Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

b. $\forall x \in [-3; 4] : f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$

Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de $x \in [-3; 4]$ pour lesquelles $f''(x)$ s'annule et change de signe.

$\forall x \in [-3; 4], (1+x^2)^3 > 0$ et $e^x > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x-1)$.

On construit alors le tableau de signe suivant :

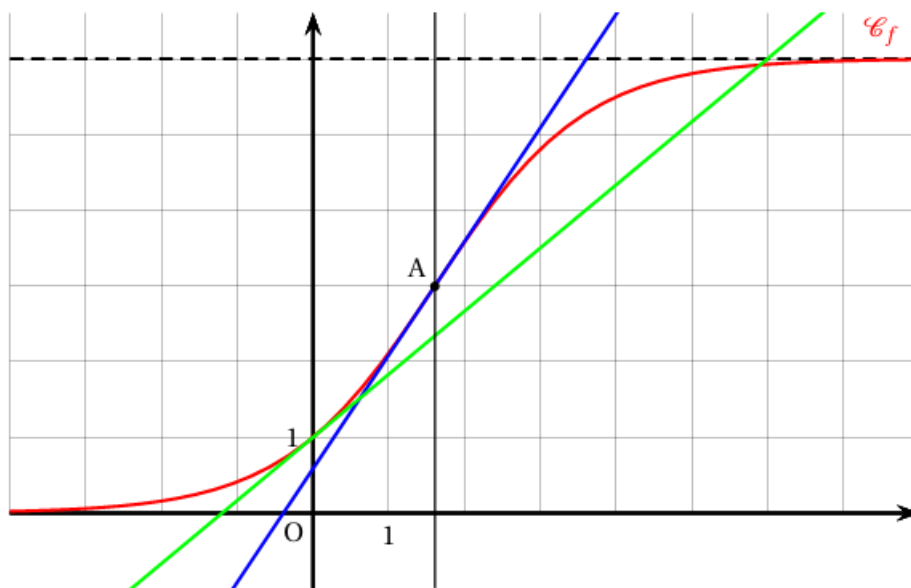
x	-3	α	1	4
$p(x)$	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	+

La fonction f'' s'annule et change de signe en $x = \alpha$ et $x = 1$. Donc $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.

Exercice 2 :

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{6}{1+5e^{-x}}$.



1. On a $f(\ln 5) = \frac{6}{1+5e^{-\ln 5}}$.

Or $e^{-\ln 5} = \frac{1}{e^{\ln 5}} = \frac{1}{5}$, donc $f(\ln 5) = \frac{6}{1+5 \times \frac{1}{5}} = \frac{6}{2} = 3$. Donc $A(\ln 5; 3) \in \mathcal{C}_f$.

2. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1+5e^{-x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6$.

Donc la droite d'équation $y = 6$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

3. a. Pour tout réel : $f'(x) = -6 \times \frac{(1+5e^{-x})'}{(1+5e^{-x})^2} = -\frac{6 \times 5 \times (-1)e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2} = \frac{30e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2}$
- b. On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $30e^{-x} > 0$ et $(1+5e^{-x})^2 > 0$; donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$: la fonction f est croissante (strictement) sur $\mathbb{R}$.

D'autre part $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1+5e^{-x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

Enfin $f(0) = \frac{6}{1+5 \times 1} = \frac{6}{6} = 1$: d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$\ln 5$	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	+
$f(x)$	0	1	3	6

4. a. Comme $30e^{-x} > 0$, $1+5e^{-x} > 0$ et donc $(1+5e^{-x})^3 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $5e^{-x} - 1$:

- $5e^{-x} - 1 = 0 \iff 5e^{-x} = 1 \iff e^{-x} = \frac{1}{5} \Rightarrow -x = \ln \frac{1}{5} \iff -x = -\ln 5 \iff x = \ln 5$;
- $5e^{-x} - 1 > 0 \Rightarrow x > \ln 5$;
- $5e^{-x} - 1 < 0 \Rightarrow x < \ln 5$.

Conclusion : f est convexe sur l'intervalle $]-\infty; \ln 5[$, concave sur $]\ln 5; +\infty[$ et a en $\ln 5$ un point d'inflexion car la dérivée seconde change de signe en ce point : il s'agit du point A.

- b. Une équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est :

$$M(x; y) \in T_0 \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

$$\text{On a vu que } f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = \frac{30e^0}{(1+5e^0)^2} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

$$\text{Donc } M(x; y) \in T_0 \iff y - 1 = \frac{5}{6}(x - 0) \iff y = \frac{5}{6}x + 1.$$

Or on a vu que sur l'intervalle $]-\infty; \ln 5[$, la fonction f est convexe et par conséquent que sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est au dessus de toutes ses tangentes menées en un point de l'intervalle $]-\infty; \ln 5[$, donc en particulier au dessus de la tangente T_0 en $x = 0$, donc numériquement :

$$f(x) \geq \frac{5}{6}x + 1 \quad \text{sur }]-\infty; \ln 5[.$$

Exercice 3 :

Partie A :

1. • Limite en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{ et, d'après la propriété des croissances comparées : } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$$

$$\text{Par limite de la somme, on a donc : } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - x \ln(x) = 0$$

- Limite en $+\infty$:

$$f(x) = x^2 - x \ln(x) = x^2 \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \right)$$

$$\text{Par croissances comparées } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ donc, par limite de la somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \right) = 1$$

$$\text{De plus } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \text{ donc, par limite du produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \right) = +\infty$$

2. Pour tout réel x strictement positif, on a : $f'(x) = 2x - 1 \times \ln(x) - x \times \frac{1}{x} = 2x - 1 - \ln(x)$.

3. Pour tout réel x strictement positif, on a : $f''(x) = 2 - 0 - \frac{1}{x} = \frac{2x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$.

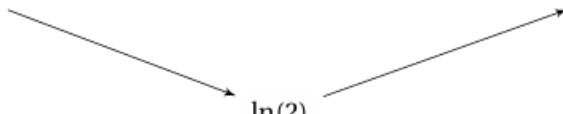
4. Déterminons le signe de $2x - 1$:

$$\begin{aligned} 2x - 1 > 0 &\iff 2x > 1 \\ &\iff x > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)

$$f' \left(\frac{1}{2} \right) = 2 \times \frac{1}{2} - 1 - \ln \left(\frac{1}{2} \right) = 1 - 1 + \ln(2) = \ln(2)$$

On a donc :

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
signe de $2x - 1$		-	0	+
signe de x	0	+		+
signe de $f''(x)$		-	0	+
variations de f'				

5. Le minimum de la fonction f' sur $]0 ; +\infty[$ est donc $\ln(2)$ qui est strictement positif, donc, sur $]0 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ et donc, la fonction f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B :

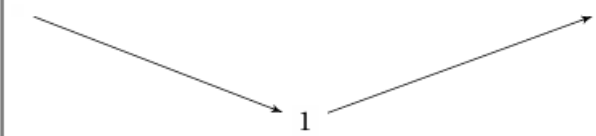
1. Pour tout réel x strictement positif, on a : $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

Déterminons le signe de $x-1$:

$$x-1 > 0 \iff x > 1$$

L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)

$$g(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1$$

x	0	1	$+\infty$
signe de $x-1$		0	+
signe de x	0	+	+
signe de $g'(x)$		0	+
variations de g			

On a donc :

2. $f(x) = x \iff x = x^2 - x \ln(x)$
 $\iff 0 = x^2 - x - x \ln(x)$
 $\iff 0 = x(x-1-\ln(x))$
 $\iff 0 = x-1-\ln(x)$ car $x > 0$ donc $x \neq 0$
 $\iff 1 = x - \ln(x)$
 $\iff 1 = g(x)$
 $\iff x = 1$

L'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$, cette solution est $x = 1$.

Partie C :

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Initialisation : Calculons u_1 . $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2} \approx 0,597$.

On constate que l'inégalité est vraie pour $n = 0$, on a bien : $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Montrons que l'inégalité est vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence on a :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1 \implies f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$$

car f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$\implies f\left(\frac{1}{2}\right) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$$

car f est la fonction de récurrence de la suite (u_n)

$$\implies \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$$

$$\text{car } f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,60 > \frac{1}{2}$$

Ceci montre que les inégalités sont vraies au rang $n + 1$.

Conclusion : Les inégalités sont vraies au rang 0, et si elle sont vraies au rang n naturel, elles sont vraies au rang suivant $n + 1$, donc, en vertu du principe de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

2. On a notamment :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$. La suite (u_n) est donc bornée par $\frac{1}{2}$ et 1.

La suite étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est convergente, vers une limite ℓ vérifiant $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $]0 ; +\infty[$, intervalle qui contient la limite ℓ de la suite.

D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

D'après la question 2. de la **Partie B**, cette équation n'a qu'une solution dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$: 1.

La suite (u_n) converge donc vers $\ell = 1$.