

FICHE D'EXERCICES SUR LA FONCTION LN

Exercice 1: Soit la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\sqrt{2}$.

Exercice 2: Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x \ln(x) - x$

1. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer la dérivée $g'(x)$ de $g(x)$ et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variations de g .

Exercice 3: Soit la fonction h définie sur $]0; 1[$ par : $h(x) = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

1. Justifier l'ensemble de définition de h .
2. Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée $h'(x)$ de $h(x)$ et étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variations de h .

Exercice 4 : Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x) = 2$
2. $\ln(3x - 2) = 0$
3. $\ln(x) + \ln(x - 1) = \ln(6)$
4. $(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$

Exercice 5 : Résoudre les inéquations suivantes :

- 1) $\ln(x + 2) < 1$
- 2) $\frac{\ln(x)}{x} > 0$
- 3) $\ln(x^2 - 3x + 2) > 0$
- 4) $\ln(x) + \ln(x - 2) < \ln(3)$

Corrigé

Exercice 1: Soit la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Posons $X = x^2 - 1$

En 1^+ : $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0^+$ et $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2. Calculer la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ et étudier son signe.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de x car $x^2 - 1 > 0$ sur $]1; +\infty[$. Donc $f'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$.

3. Dresser le tableau de variations de f .

x	1	$+\infty$
signes de $f'(x)$		+
variations de f	$-\infty$	$+\infty$



4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\sqrt{2}$.

$$f(\sqrt{2}) = \ln(2 - 1) = \ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad f'(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$$

$$y = 2\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + 0 \Leftrightarrow y = 2\sqrt{2}x - 4$$

est l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\sqrt{2}$.

Exercice 2: Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x \ln(x) - x = x(\ln(x) - 1)$

1. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

En 0^+ : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ donc par différence $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$

En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - 1 = +\infty$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

2. Calculer la dérivée $g'(x)$ de $g(x)$ et étudier son signe.

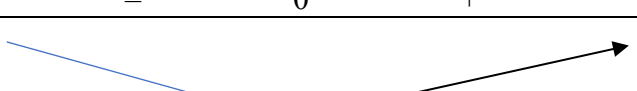
$$g'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$$

Le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $\ln(x)$.

Donc : $g'(x) < 0$ si $0 < x < 1$ et $g'(x) > 0$ si $x > 1$; $g'(x) = 0$ si $x = 1$

3. Dresser le tableau de variations de g .

x	0	1	$+\infty$	
signes de $g'(x)$		-	0	+
variations de g	0	-1	$+\infty$	



Exercice 3: Soit la fonction h définie sur $]0; 1[$ par : $h(x) = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

1. Justifier l'ensemble de définition de h .

Pour que $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ existe, il faut que $\frac{1}{x} > 0$, ce qui est vrai si $x > 0$.

Pour que $\ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ existe, il faut que $\ln\left(\frac{1}{x}\right) > 0$, ce qui équivaut à $\frac{1}{x} > 1$,

donc $1 > x > 0$, soit $0 < x < 1$.

Donc l'ensemble de définition est $]0; 1[$.

2. Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

Posons $X = \frac{1}{x}$ et $Y = \ln(X)$

En 0^+ : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$

De plus $\lim_{Y \rightarrow +\infty} \ln(Y) = +\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$

En 1^- : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1^+$ et $\lim_{X \rightarrow 1^+} \ln(X) = 0^+$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0^+$

De plus $\lim_{Y \rightarrow 0^+} \ln(Y) = -\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = -\infty$

3. Calculer la dérivée $h'(x)$ de $h(x)$ et étudier son signe.

Posons $u(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ alors $u'(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} \times \frac{x}{1} = -\frac{1}{x}$ et $h(x) = \ln(u(x))$

$$h'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{x \ln\left(\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{x \times (-\ln(x))} = \frac{1}{x \ln(x)}$$

Comme $0 < x < 1$, $\ln(x) < 0$, donc $x \ln(x) < 0$, et $h'(x) < 0$.

4. Dresser le tableau de variations de h .

x	0	1
signes de $h'(x)$		+
variations de h	$+\infty$	$-\infty$

Exercice 4 : Résoudre les équations suivantes :

1. Ensemble de définition : $] 0 ; + \infty [$

$$\ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = e^2 \quad S = \{ e^2 \}$$

2. Ensemble de définition : $3x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$ donc $] \frac{2}{3} ; + \infty [$

$$\ln(3x - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = e^0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \quad 1 > \frac{2}{3} \text{ donc } S = \{ 1 \}$$

3. Ensemble de définition : $x > 0$ et $x - 1 > 0$ donc $x > 1$ donc $] 1 ; + \infty [$

$$\ln(x) + \ln(x - 1) = \ln(6) \Leftrightarrow \ln(x(x - 1)) = \ln(6) \Leftrightarrow x^2 - x = 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25 \quad x_1 = \frac{1 - 5}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + 5}{2} = 3 \quad -2 < 1 \quad \text{et} \quad 3 > 1 \quad \text{donc } S = \{ 3 \}$$

4. Ensemble de définition : $x > 0$ donc $] 0 ; + \infty [$

Posons $X = \ln(x)$

$$(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 = 0 \text{ revient à résoudre } X^2 - 3X + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \quad X_1 = \frac{3 - 1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

$$\ln(x_1) = 1 \quad \text{et} \quad \ln(x_2) = 2$$

$$x_1 = e \quad \text{et} \quad x_2 = e^2 \quad \text{donc } S = \{ e ; e^2 \}$$

Exercice 5 : Résoudre les inéquations suivantes :

1) Ensemble de définition : $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ donc $] -2 ; +\infty [$

$$\ln(x + 2) < 1 \Leftrightarrow x + 2 < e^1 \Leftrightarrow x < e - 2 \quad e - 2 > -2 \text{ donc } S =] -2 ; e - 2 [$$

2) Ensemble de définition : $x > 0$ et $x \neq 0$ donc $] 0 ; +\infty [$

$$\frac{\ln(x)}{x} > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 0 \text{ car } x > 0 \Leftrightarrow x > e^0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ donc } S =] 1 ; +\infty [$$

3) Ensemble de définition : $x^2 - 3x + 2 > 0 \quad \Delta = 9 - 8 = 1. \quad x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$

Le trinôme est positif à l'extérieur des racines. Donc le domaine de définition est $] -\infty ; 1 [\cup] 2 ; +\infty [$.

$$\ln(x^2 - 3x + 2) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > e^0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 > 0$$

$$\Delta = 9 - 4 = 5. \quad x_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,38 \quad x_4 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,62$$

Le trinôme est positif à l'extérieur des racines. Donc si $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou si $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$$\text{donc } S =] -\infty ; \frac{3-\sqrt{5}}{2} [\cup] \frac{3+\sqrt{5}}{2} ; +\infty [$$

4) Ensemble de définition : $x > 0$ et $x - 2 > 0$ donc $x > 2$ donc $] 2 ; +\infty [$

$$\ln(x) + \ln(x - 2) < \ln(3) \Leftrightarrow \ln(x(x - 2)) < \ln(3) \Leftrightarrow x(x - 2) < 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16. \quad x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

Le trinôme est négatif entre les racines donc $-1 < x < 3$.

$$\text{Il faut que } x > 2 \text{ donc } S =] 2 ; 3 [$$