# EQUATIONS DE DROITES SYSTEMES D'EQUATIONS

## I Les différentes équations de droites :

### 1) Equation réduite d'une droite :

Une fonction affine $f(x) = mx + p$ est représentée par une droite d'équation **$y = mx + p$.**
Cette équation est une **équation réduite** de la droite .

Si m = 0 $y = p$ est l'équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.
Si p = 0 $y = mx$ est l'équation réduite d'une droite passant par l'origine.
Si $m \neq 0$ et $p \neq 0$ $y = mx + p$ est l'équation réduite d'une droite oblique.

Il existe aussi des droites qui sont parallèles à l'axe des ordonnées.
Tous les points de ce type de droite ont la même abscisse donc **l'équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées est : $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.**
Attention : Ce type de droite ne représente pas une fonction !

### Comment calculer l'équation réduite d'une droite connaissant les coordonnées de deux points:

Exemple : Retrouver par le calcul l'équation de la droite (AB) avec A ( – 1 ; 2 ) et B( 5 ; –3 )

On procède comme pour retrouver la fonction affine telle que $f(-1) = 2$ et $f(5) = -3$.

Calcul du coefficient directeur $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-3-2}{5+1} = -\dfrac{5}{6}$

donc (AB) : $y = -\dfrac{5}{6}x + p$

Calcul de l'ordonnée à l'origine: On remplace $x$ et y dans l'équation par les coordonnées de A ou de B.

Avec le point A : $2 = -\dfrac{5}{6} \times (-1) + p \Leftrightarrow p = 2 - \dfrac{5}{6} = \dfrac{7}{6}$ ou avec B : $-3 = -\dfrac{5}{6} \times 5 + p \Leftrightarrow p = -3 + \dfrac{25}{6} = \dfrac{7}{6}$

**La droite (AB) admet donc pour équation réduite** $y = -\dfrac{5}{6}x + \dfrac{7}{6}$

### 2) Equation cartésienne d'une droite :

**On appelle équation cartésienne d'une droite (d) une équation de (d) sous la forme $ax + by + c = 0$.**
**Contrairement à l'équation réduite, l'équation cartésienne d'une droite n'est pas unique !**

Il faut savoir passer d'une équation réduite à une équation cartésienne et inversement.

Exemple : Transformer l'équation réduite $y = \dfrac{1}{2}x + 7$ en équation cartésienne.

$y = \dfrac{1}{2}x + 7 \Leftrightarrow 0 = \dfrac{1}{2}x - y + 7 \Leftrightarrow x - 2y + 14 = 0$ ( en multipliant tous les coefficients par 2 )

Transformer l'équation cartésienne $5x - 3y + 2 = 0$ en équation réduite.

$5x - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow -3y = -5x - 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{3}x + \dfrac{2}{3}$

## 3) Vecteur directeur d'une droite :

**On appelle vecteur directeur d'une droite (d) tout vecteur non nul $\vec{u}$ ayant la même direction que la droite (d).**

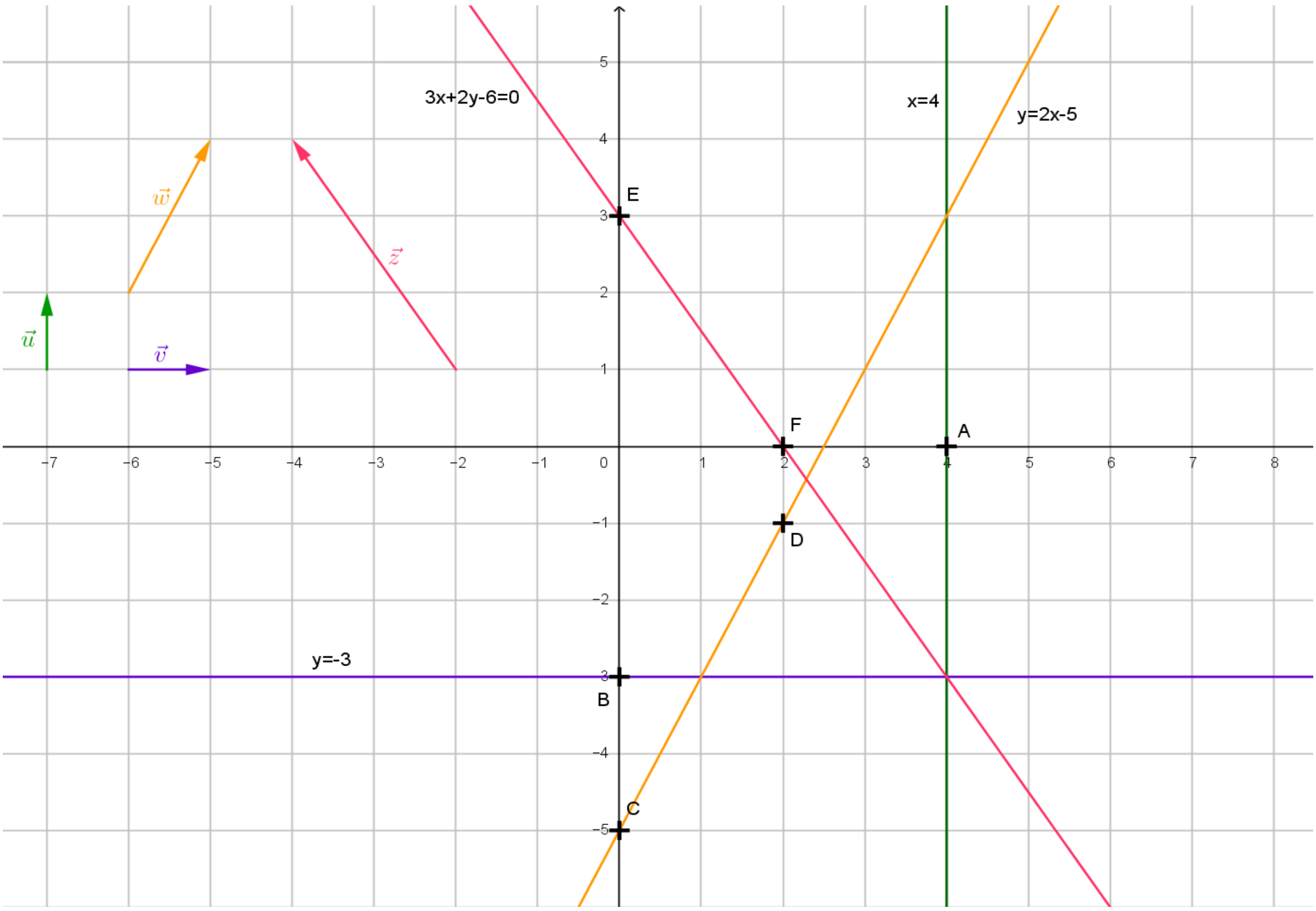
Soit ( O, $\vec{i}$, $\vec{j}$ ) un repère du plan et (d) une droite du plan.

- si la droite (d) est une droite du plan parallèle à l'axe des abscisses, son équation est $y = k$, $k \in \mathbb{R}$ alors $\vec{i}$ est un vecteur directeur de (d).
- si la droite (d) est une droite du plan parallèle à l'axe des ordonnées, son équation est $x = k$, $k \in \mathbb{R}$ alors $\vec{j}$ est un vecteur directeur de (d).
- **si (d) est une droite du plan ni parallèle à l'axe des abscisses, ni parallèle à l'axe des ordonnées, alors l'équation réduite de (d) est $y = mx + p$ et un vecteur directeur est $\vec{u}$ ( 1 ; m ) ou une équation cartésienne de (d) est $ax + by + c = 0$ et un vecteur directeur est $\vec{u}$ ( – b ; a ).**

**Exemples :** Pour chacune des droites suivantes,

- tracer cette droite dans le repère ci-dessous
- déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur et tracer ce vecteur dans le repère.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(d_1)$ : $x = 4$ | $(d_2)$ : $y = -3$ | $(d_3)$ : $y = 2x - 5$ | $(d_4)$ : $3x + 2y - 6 = 0$ |
| droite verticale passant par A ( 4 ; 0 ) | droite horizontale passant par B( 0 ; – 3 ) | droite passant par C( 0 ; – 5 ) et D ( 2 ; – 1) | droite passant par E( 0 ; 3 ) et F( 2 ; 0 ) |
| $\vec{u}$ ( 0 ; 1 ) | $\vec{v}$ ( 1 ; 0 ) | $\vec{w}$ ( 1 ; 2 ) | $\vec{z}$ ( – 2 ; 3 ) |



## 4) Droites parallèles :

Deux droites seront parallèles si elles ont le même coefficient directeur ou des vecteurs directeurs colinéaires.

**$\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ det $(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow x\,y' - y\,x' = 0 \Leftrightarrow x\,y' = y\,x'$**

Remarques :

$a\,x + b\,y + c = 0$ est l'équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D})$ et $y = m\,x + p$ son équation réduite.
$a'\,x + b'\,y + c' = 0$ est l'équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D}')$ et $y = m'\,x + p'$ son équation réduite.

$a\,x + b\,y + c = 0 \Leftrightarrow b\,y = -a\,x - c \Leftrightarrow y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$

Donc $m = -\dfrac{a}{b}$ et $p = -\dfrac{c}{b}$

De même $a'\,x + b'\,y + c' = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{a'}{b'}x - \dfrac{c'}{b'}$

Donc $m' = -\dfrac{a'}{b'}$ et $p' = -\dfrac{c'}{b'}$

Si $m = m'$ alors $-\dfrac{a}{b} = -\dfrac{a'}{b'}$ donc $-a\,b' = -a'\,b$ ( produit en croix ) donc $\mathbf{ab' = a'b}$

Si $p = p'$ alors $-\dfrac{c}{b} = -\dfrac{c'}{b'}$ donc $-c\,b' = -c'\,b$ donc $\mathbf{cb' = c'b}$

Le vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ est $\vec{u}\,(-b\,;a)$ et le vecteur directeur de $(\mathcal{D}')$ est $\vec{u'}\,(-b'\,;a')$

$\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow -b\,a' - a\,(-b') = 0 \Leftrightarrow -ba' + ab' = 0 \Leftrightarrow \mathbf{ab' = a'b}$
On retrouve la même égalité qu'avec $m = m'$.

On retiendra donc :

Deux droites seront **confondues** si elles ont la **même équation réduite** ou si **$a\,b' = a'\,b$ et $c\,b' = c'\,b$.**

Deux droites seront **strictement parallèles** si elles ont le même coefficient directeur
mais pas la même ordonnée à l'origine ( **$m = m'$ et $p \neq p'$** ) ou si **$a\,b' = a'\,b$ et $c'\,b \neq c\,b'$** .

Deux droites seront **sécantes** si elles n'ont pas le même coefficient directeur ( **$m \neq m'$** )
ou si elles ont des vecteurs directeurs non colinéaires ( **$a\,b' \neq a'\,b$** ).
Elles n'ont alors qu'un **seul point d'intersection**.
Les coordonnées de ce point pourront être déterminées par la résolution d'un système d'équations.
Cette résolution pourra être graphique ou algébrique.