

I. Produit scalaire de deux vecteurs :

1) Définitions :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

➤ 1ere définition

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel obtenu en effectuant le produit des normes des deux vecteurs par le cosinus de l'angle formé par ces deux vecteurs.

On notera : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

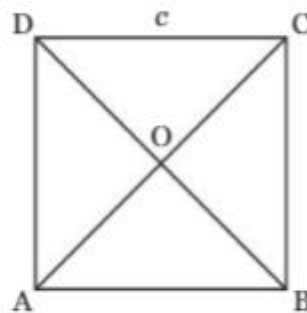
Exemple : $\|\vec{u}\| = 5$; $\|\vec{v}\| = 3$; $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{4} = \frac{15}{2} \sqrt{2}$.

Attention : Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul, on définit $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

n° 29 page 243

29 On considère un carré ABCD de centre O et de côté c. Calculer les produits scalaires suivants.

- | | |
|--|--|
| 1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ | 5. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AB}$ |
| 2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$ | 6. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$ |
| 3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ | 7. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{OC}$ |
| 4. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$ | |



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$AB = c ;$$

D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle ABC rectangle en B, on a :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = c^2 + c^2 = 2c^2 \text{ donc } AC = \sqrt{2c^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{c^2} = \sqrt{2} \times c$$

Dans un carré, les diagonales sont les bissectrices des angles droits donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = c \times \sqrt{2} \times c \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} c^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = c^2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AO}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = AB \times AO \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$$

$$AB = c ;$$

Dans un carré, les diagonales se coupent en leur milieu donc O est le milieu de [AC]

$$\text{donc } AO = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times c$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = AB \times AO \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = c \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times c \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} c^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} c^2$$

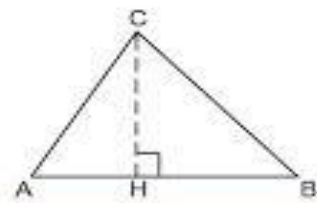
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = AB \times CD \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \\ &= c \times c \times \cos(\pi) \\ &= c^2 \times (-1) \\ &= -c^2 \end{aligned}$$

➤ **2ème définition**

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel défini par:

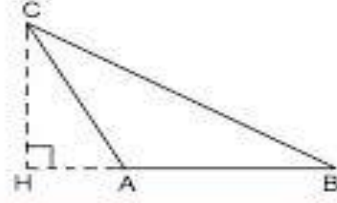
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overline{AB} \text{ et } \overline{AC} \text{ sont colinéaires de même sens} \\ -AB \times AH & \text{si } \overline{AB} \text{ et } \overline{AC} \text{ sont colinéaires de sens contraire} \end{cases}$$

où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AH} = AB \times AH$$

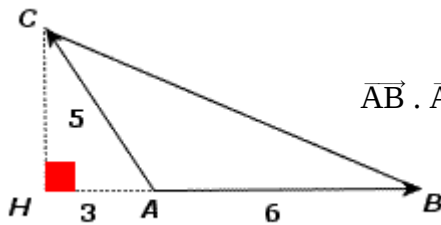
si H est sur la demi-droite [AB).



$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AH} = -AB \times AH$$

si H n'est pas sur la demi-droite [AB).

Exemple : Calculer $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.



$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AH} = -AB \times AH = -6 \times 3 = -18$$

➤ **3ème définition**

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$$

Exemple : $\vec{u}(2; 4)$ et $\vec{v}(-3; 3)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-3) + 4 \times 3 = 6$$

2) **Propriétés** (règles de calculs logiques)

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont des vecteurs ; a et b sont des réels.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $a(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a\vec{v})$
- $(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = (ab)\vec{u} \cdot \vec{v}$

3) Produit scalaire et normes :

n° 63 page 247

$$\begin{aligned}
 1) \text{ a) } \| \vec{u} + \vec{v} \|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) . (\vec{u} + \vec{v}) \\
 &= \vec{u} . \vec{u} + \vec{u} . \vec{v} + \vec{v} . \vec{u} + \vec{v} . \vec{v} \\
 &= \| \vec{u} \|^2 + \vec{u} . \vec{v} + \vec{u} . \vec{v} + \| \vec{v} \|^2 \\
 &= \| \vec{u} \|^2 + 2 \vec{u} . \vec{v} + \| \vec{v} \|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \| \vec{u} + \vec{v} \|^2 &= \| \vec{u} \|^2 + 2 \vec{u} . \vec{v} + \| \vec{v} \|^2 \\
 \| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2 &= 2 \vec{u} . \vec{v}
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \boxed{ \vec{u} . \vec{v} = \frac{1}{2} (\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2) }$$

$$\begin{aligned}
 2) \text{ a) } \| \vec{u} - \vec{v} \|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) . (\vec{u} - \vec{v}) \\
 &= \vec{u} . \vec{u} - \vec{u} . \vec{v} - \vec{v} . \vec{u} + \vec{v} . \vec{v} \\
 &= \| \vec{u} \|^2 - \vec{u} . \vec{v} - \vec{u} . \vec{v} + \| \vec{v} \|^2 \\
 &= \| \vec{u} \|^2 - 2 \vec{u} . \vec{v} + \| \vec{v} \|^2
 \end{aligned}$$

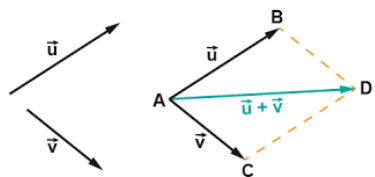
$$\begin{aligned}
 \| \vec{u} - \vec{v} \|^2 &= \| \vec{u} \|^2 - 2 \vec{u} . \vec{v} + \| \vec{v} \|^2 \\
 2 \vec{u} . \vec{v} &= \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} - \vec{v} \|^2
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \boxed{ \vec{u} . \vec{v} = \frac{1}{2} (\| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} - \vec{v} \|^2) }$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \| \vec{u} + \vec{v} \|^2 &= \| \vec{u} \|^2 + 2 \vec{u} . \vec{v} + \| \vec{v} \|^2 \\
 \| \vec{u} - \vec{v} \|^2 &= \| \vec{u} \|^2 - 2 \vec{u} . \vec{v} + \| \vec{v} \|^2
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} - \vec{v} \|^2 = 4 \vec{u} . \vec{v}$$

$$\text{donc } \boxed{ \vec{u} . \vec{v} = \frac{1}{4} (\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} - \vec{v} \|^2) }$$



$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

Remarque : $\vec{u} . \vec{u} = \| \vec{u} \|^2 = \vec{u}^2$. C'est le carré scalaire de $\vec{u}$

4) Signe d'un produit scalaire :

Le produit scalaire étant un nombre réel , il peut être négatif, positif ou nul.

a) Produit scalaire nul :

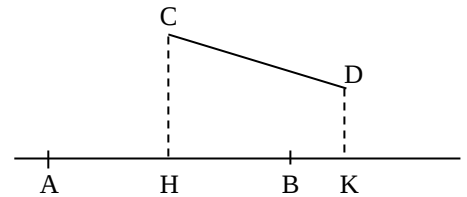
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0 \text{ ou } \|\vec{v}\| = 0 \text{ ou } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$
$$\vec{u} = 0 \text{ ou } \vec{v} = 0 \text{ ou } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

Propriété : Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux
 $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. On notera $\vec{u} \perp \vec{v}$.

b) Produit scalaire et projections

Si A , B , C et D sont quatre points non alignés du plan
Si H et K sont les projetés respectifs de C et D sur (AB)

$$\text{Alors } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HK}$$



c) Applications :

##Démontrer qu'un triangle est rectangle :

Dans un repère orthonormé on a : $A(-2; -3)$; $B(1; 1)$; $C(-3; -1)$;
 $D(-4; 2)$; $E(-1; -3)$ et $F(2; -1)$
Les triangles ABC et FDE sont-ils rectangles respectivement en C et en E ?

$$\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 4 - 4 = 0 \text{ donc } \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$$

donc ABC est rectangle en C.

$$\overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EF} = -9 + 10 = 1 \neq 0$$

donc EFG n'est pas rectangle en E.

##Calculer la mesure d'un angle :

Dans un repère orthonormé on a : $A(-1; 2)$; $B(-3; 1)$; $C(1; -3)$
Calculer une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ en radians à 0,01 près.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 + 5 = 1 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{5} \times \sqrt{29} \times \cos \widehat{BAC} \end{cases}$$
$$\text{donc } \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{145}} \quad \text{donc } \widehat{BAC} \approx 1,49 \text{ rad.}$$

5) Egalités remarquables :

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 & \text{soit} & \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ (\vec{u} - \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 & \text{soit} & \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u}^2 - \vec{v}^2 & \text{soit} & \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

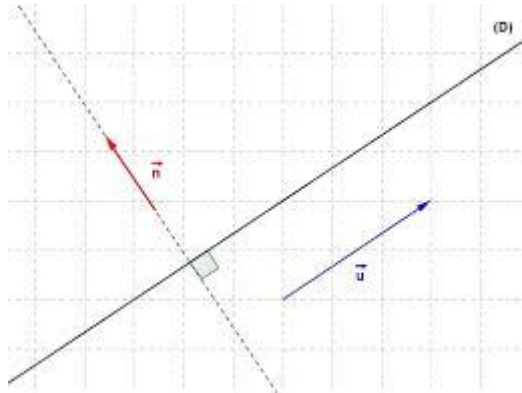
II. Vecteur normal

1. Généralités

Définition :

On se place dans un repère orthonormé.

On appelle **vecteur normal** $\vec{n}$ à une droite tout vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite.



Propriété : Deux droites du plan sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'une est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

2. Equation cartésienne d'une droite

Propriété

Soit a et b deux réels non nuls simultanément.

- Toute droite de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$
- Toute droite d'équation $ax + by + c = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

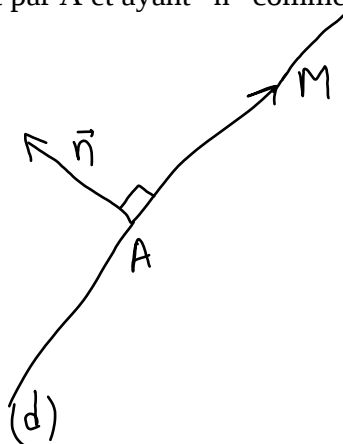
Exemple : Déterminer l'équation de la droite qui passe par $A(-2 ; 4)$ et qui a pour vecteur normal $\vec{n} (4 ; 7)$

Toute droite de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ admet une équation de la forme $4x + 7y + c = 0$

Or $A(-2 ; 4)$ est sur la droite donc $4x_A + 7y_A + c = 0 \quad 4 \times (-2) + 7 \times 4 + c = 0$ donc $c = -20$

Cette droite a pour équation $4x + 7y - 20 = 0$

Remarque : L'ensemble des points M du plan tels que $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$ est la droite passant par A et ayant $\vec{n}$ comme vecteur normal.



III. Applications du produit scalaire

1. Equation de cercle

Théorème :

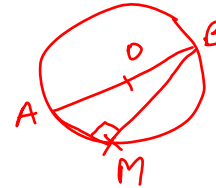
Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r .

Une équation de $(\mathcal{C})$ est $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Propriété :

Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

Explication : si M est un point du cercle de diamètre $[AB]$ alors ABM est un triangle rectangle en M
donc (MA) et (MB) sont perpendiculaires



2. Médiane et centre de gravité

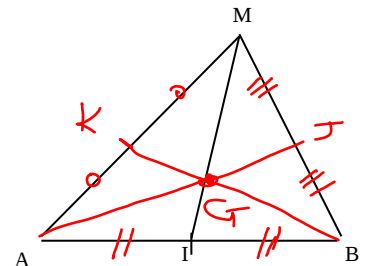
Definitions:

- Une médiane dans un triangle, est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé.
- Dans un triangle ABC , les trois médianes sont concourantes en un point G appelé le centre de gravité du triangle et vérifiant $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

3. Le théorème de la médiane :

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$.
Quel que soit le point M du plan on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$



Démonstration :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \vec{MA} \cdot \vec{MA} + \vec{MB} \cdot \vec{MB} \\ &= (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IA}) + (\vec{MI} + \vec{IB}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB}) \\ &= MI^2 + 2 \vec{MI} \cdot \vec{IA} + IA^2 + MI^2 + 2 \vec{MI} \cdot \vec{IB} + IB^2 \\ &= 2 MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2 \vec{MI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB}) \\ &= 2 MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2 \vec{MI} \cdot \vec{0} \\ &= 2 MI^2 + \left(\frac{1}{2} AB\right)^2 + \left(\frac{1}{2} AB\right)^2 + 2 \vec{MI} \cdot \vec{0} \\ &= 2 MI^2 + \frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{4} AB^2 + 0 \\ &= 2 MI^2 + \frac{1}{2} AB^2 \end{aligned}$$

Relation de Chasles
 $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ car I milieu de $[AB]$
 $IA = IB = \frac{1}{2} AB$
 $\vec{MI} \cdot \vec{0} = 0$

Quel que soit le point M du plan on a :

$$\mathbf{MA}^2 - \mathbf{MB}^2 = 2 \mathbf{MI} \cdot \mathbf{BA}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathbf{MA}^2 - \mathbf{MB}^2 &= \overrightarrow{\mathbf{MA}}^2 - \overrightarrow{\mathbf{MB}}^2 \\ &= (\overrightarrow{\mathbf{MI}} + \overrightarrow{\mathbf{IA}}) \cdot (\overrightarrow{\mathbf{MI}} + \overrightarrow{\mathbf{IA}}) - (\overrightarrow{\mathbf{MI}} + \overrightarrow{\mathbf{IB}}) \cdot (\overrightarrow{\mathbf{MI}} + \overrightarrow{\mathbf{IB}}) \quad \text{Relation de Chasles} \\ &= \mathbf{MI}^2 + 2 \overrightarrow{\mathbf{MI}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{IA}} + \mathbf{IA}^2 - (\mathbf{MI}^2 + 2 \overrightarrow{\mathbf{MI}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{IB}} + \mathbf{IB}^2) \\ &= \mathbf{IA}^2 - \mathbf{IB}^2 + 2 \overrightarrow{\mathbf{MI}} \cdot (\overrightarrow{\mathbf{IA}} - \overrightarrow{\mathbf{IB}}) \quad \text{Or } \overrightarrow{\mathbf{IA}} - \overrightarrow{\mathbf{IB}} = \overrightarrow{\mathbf{IA}} + \overrightarrow{\mathbf{BI}} = \overrightarrow{\mathbf{BI}} + \overrightarrow{\mathbf{IA}} = \overrightarrow{\mathbf{BA}} \\ &= 2 \overrightarrow{\mathbf{MI}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{BA}} \quad \text{et } \mathbf{IA} = \mathbf{IB} \text{ car } I \text{ milieu de } [\mathbf{AB}] \end{aligned}$$

Quel que soit le point M du plan on a :

$$\mathbf{MA} \cdot \mathbf{MB} = \mathbf{MI}^2 - \frac{1}{4} \mathbf{AB}^2$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathbf{MA} \cdot \mathbf{MB} &= (\overrightarrow{\mathbf{MI}} + \overrightarrow{\mathbf{IA}}) \cdot (\overrightarrow{\mathbf{MI}} + \overrightarrow{\mathbf{IB}}) \\ &= \mathbf{MI}^2 + \overrightarrow{\mathbf{MI}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{IA}} + \overrightarrow{\mathbf{MI}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{IB}} + \overrightarrow{\mathbf{IA}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{IB}} \\ &= \mathbf{MI}^2 + \overrightarrow{\mathbf{MI}} \cdot (\overrightarrow{\mathbf{IA}} + \overrightarrow{\mathbf{IB}}) + \left(-\frac{1}{2} \overrightarrow{\mathbf{AB}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{\mathbf{AB}}\right) \\ &= \mathbf{MI}^2 - \frac{1}{4} \mathbf{AB}^2 \end{aligned}$$