

EQUATIONS DE DROITES SYSTEMES D'EQUATIONS

I Les différentes équations de droites :

1) Equation réduite d'une droite :

Une fonction affine $f(x) = m x + p$ est représentée par une droite d'équation $y = m x + p$.
 Cette équation est une **équation réduite** de la droite .

Si $m = 0$ $y = p$ est l'équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Si $p = 0$ $y = m x$ est l'équation réduite d'une droite passant par l'origine.

Si $m \neq 0$ et $p \neq 0$ $y = m x + p$ est l'équation réduite d'une droite oblique.

Il existe aussi des droites qui sont parallèles à l'axe des ordonnées.

Tous les points de ce type de droite ont la même abscisse donc **l'équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées est : $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.**

Attention : Ce type de droite ne représente pas une fonction !

Comment calculer l'équation réduite d'une droite connaissant les coordonnées de deux points:

Exemple : Retrouver par le calcul l'équation de la droite (AB) avec A (- 1 ; 2) et B(5 ; -3)

On procède comme pour retrouver la fonction affine telle que $f(-1) = 2$ et $f(5) = -3$.

$$\text{Calcul du coefficient directeur} \quad m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 2}{5 + 1} = -\frac{5}{6}$$

$$\text{donc (AB) : } y = -\frac{5}{6} x + p$$

Calcul de l'ordonnée à l'origine: On remplace x et y dans l'équation par les coordonnées de A ou de B.

$$\text{Avec le point A : } 2 = -\frac{5}{6} \times (-1) + p \Leftrightarrow p = 2 - \frac{5}{6} = \frac{7}{6} \quad \text{ou avec B : } -3 = -\frac{5}{6} \times 5 + p \Leftrightarrow p = -3 + \frac{25}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\text{La droite (AB) admet donc pour équation réduite } y = -\frac{5}{6} x + \frac{7}{6}$$

2) Equation cartésienne d'une droite :

**On appelle équation cartésienne d'une droite (d) une équation de (d) sous la forme $a x + b y + c = 0$.
 Contrairement à l'équation réduite, l'équation cartésienne d'une droite n'est pas unique !**

Il faut savoir passer d'une équation réduite à une équation cartésienne et inversement.

Exemple : Transformer l'équation réduite $y = \frac{1}{2} x + 7$ en équation cartésienne.

$$y = \frac{1}{2} x + 7 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2} x - y + 7 \Leftrightarrow x - 2y + 14 = 0 \quad (\text{ en multipliant tous les coefficients par 2 })$$

Transformer l'équation cartésienne $5x - 3y + 2 = 0$ en équation réduite.

$$5x - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow -3y = -5x - 2 \Leftrightarrow y = \frac{5}{3} x + \frac{2}{3}$$

3) Vecteur directeur d'une droite :

On appelle vecteur directeur d'une droite (d) tout vecteur non nul $\vec{u}$ ayant la même direction que la droite (d).

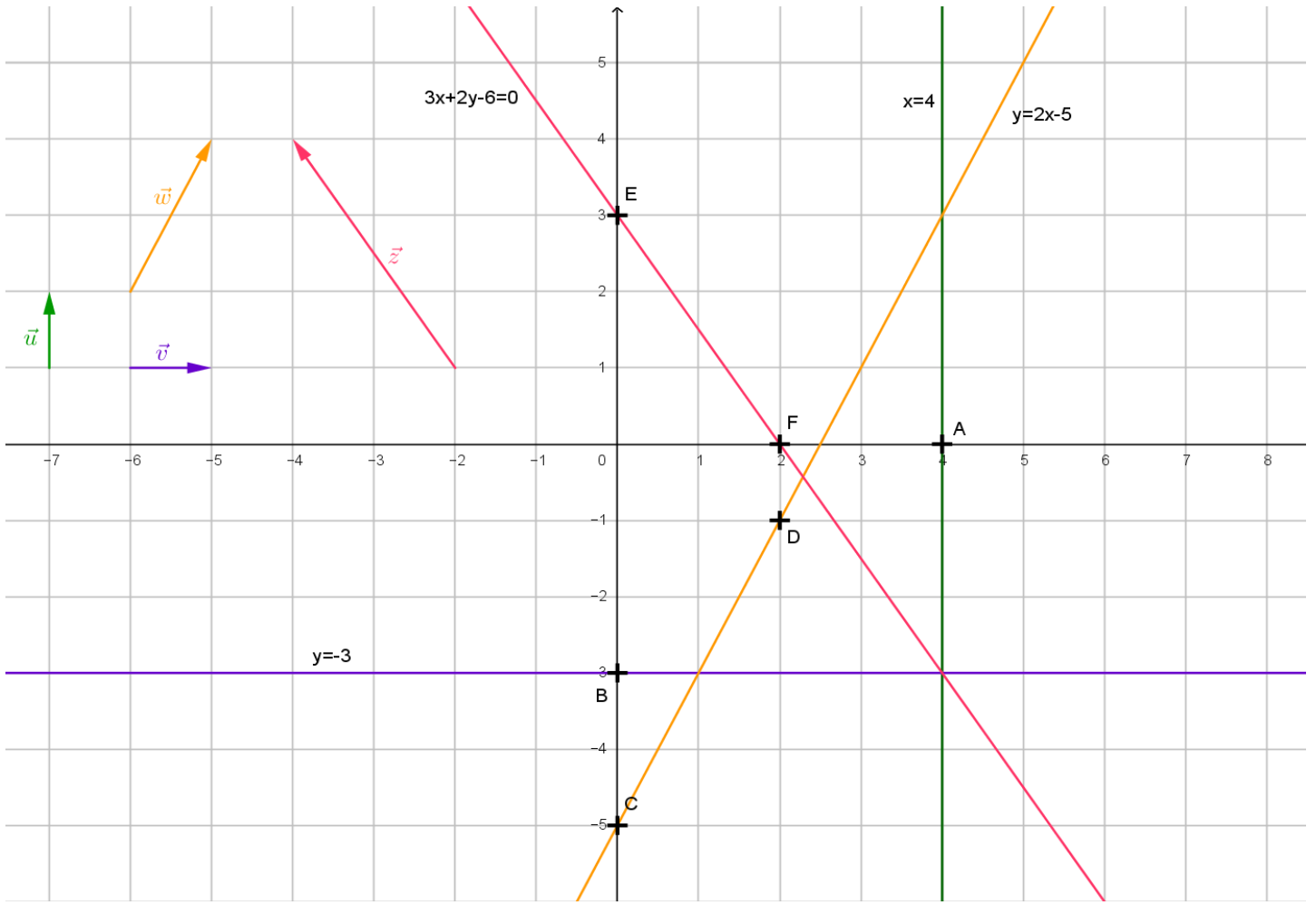
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et (d) une droite du plan.

- si la droite (d) est une droite du plan parallèle à l'axe des abscisses, son équation est $y = k, k \in \mathbb{R}$ alors $\vec{i}$ est un vecteur directeur de (d).
- si la droite (d) est une droite du plan parallèle à l'axe des ordonnées, son équation est $x = k, k \in \mathbb{R}$ alors $\vec{j}$ est un vecteur directeur de (d).
- **si (d) est une droite du plan ni parallèle à l'axe des abscisses, ni parallèle à l'axe des ordonnées, alors l'équation réduite de (d) est $y = mx + p$ et un vecteur directeur est $\vec{u}(1; m)$ ou une équation cartésienne de (d) est $ax + by + c = 0$ et un vecteur directeur est $\vec{u}(-b; a)$.**

Exemples : Pour chacune des droites suivantes,

- tracer cette droite dans le repère ci-dessous
- déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur et tracer ce vecteur dans le repère.

$(d_1) : x = 4$	$(d_2) : y = -3$	$(d_3) : y = 2x - 5$	$(d_4) : 3x + 2y - 6 = 0$
droite verticale passant par A(4 ; 0)	droite horizontale passant par B(0 ; -3)	droite passant par C(0 ; -5) et D(2 ; -1)	droite passant par E(0 ; 3) et F(2 ; 0)
$\vec{u}(0 ; 1)$	$\vec{v}(1 ; 0)$	$\vec{w}(1 ; 2)$	$\vec{z}(-2 ; 3)$



4) Droites parallèles :

Deux droites seront parallèles si elles ont le même coefficient directeur ou des vecteurs directeurs colinéaires.

$\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow x y' - y x' = 0 \Leftrightarrow x y' = y x'$

Remarques :

$ax + by + c = 0$ est l'équation cartésienne de la droite ($\mathcal{D}$) et $y = mx + p$ son équation réduite.

$a'x + b'y + c' = 0$ est l'équation cartésienne de la droite ($\mathcal{D}'$) et $y = m'x + p'$ son équation réduite.

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -ax - c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$\text{Donc } m = -\frac{a}{b} \text{ et } p = -\frac{c}{b}$$

$$\text{De même } a'x + b'y + c' = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a'}{b'}x - \frac{c'}{b'}$$

$$\text{Donc } m' = -\frac{a'}{b'} \text{ et } p' = -\frac{c'}{b'}$$

$$\text{Si } m = m' \text{ alors } -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'} \text{ donc } -ab' = -a'b \text{ (produit en croix) donc } ab' = a'b$$

$$\text{Si } p = p' \text{ alors } -\frac{c}{b} = -\frac{c'}{b'} \text{ donc } -cb' = -c'b \text{ donc } cb' = c'b$$

Le vecteur directeur de ($\mathcal{D}$) est $\vec{u}(-b; a)$ et le vecteur directeur de ($\mathcal{D}'$) est $\vec{u}'(-b'; a')$

$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires $\Leftrightarrow -ba' - a(-b') = 0 \Leftrightarrow -ba' + ab' = 0 \Leftrightarrow ab' = a'b$

On retrouve la même égalité qu'avec $m = m'$.

On retiendra donc :

Deux droites seront **confondues** si elles ont la **même équation réduite** ou si **$ab' = a'b$ et $cb' = c'b$** .

Deux droites seront **strictement parallèles** si elles ont le même coefficient directeur mais pas la même ordonnée à l'origine (**$m = m'$ et $p \neq p'$**) ou si **$ab' = a'b$ et $cb' \neq c'b$** .

Deux droites seront **sécantes** si elles n'ont pas le même coefficient directeur (**$m \neq m'$**) ou si elles ont des vecteurs directeurs non colinéaires (**$ab' \neq a'b$**).

Elles n'ont alors qu'un **seul point d'intersection**.

Les coordonnées de ce point pourront être déterminées par la résolution d'un système d'équations. Cette résolution pourra être graphique ou algébrique.

II Résolutions des systèmes linéaires :

1) Définitions :

- a) On appelle **équation linéaire à deux inconnues x et y** une équation du type $a x + b y + c = 0$ avec a, b, c des réels quelconques.
- b) Un **système d'équations linéaires à deux inconnues x et y et à deux équations** est de la forme
- $$\begin{cases} a x + b y + c = 0 \\ a' x + b' y + c' = 0 \end{cases}$$
- c) **Résoudre un système d'équations linéaires à deux inconnues x et y et à deux équations, c'est trouver tous les couples $(x ; y)$ vérifiant simultanément les deux équations .**

2) Résolution graphique d'un système linéaire:

Soit $\begin{cases} a x + b y + c = 0 \\ a' x + b' y + c' = 0 \end{cases}$ un système à deux inconnues.

$a x + b y + c = 0$ est l'équation de la droite $(\mathcal{D})$.

$a' x + b' y + c' = 0$ est l'équation de la droite $(\mathcal{D}')$.

Les solutions du système sont **les coordonnées du point d'intersection des deux droites**.

Plusieurs cas sont possibles :

- Si $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont **confondues** (c'est-à-dire si **$a b' = a' b$ et $c b' = c' b$**)
L'ensemble des solutions est la droite $(\mathcal{D})$ toute entière.
Il y a une **infinité de solutions** : tous les couples de coordonnées vérifiant l'équation de $(\mathcal{D})$.
 $S = \{ (x ; y) \text{ tels que } a x + b y + c = 0 \} = (\mathcal{D})$.
- Si $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont **parallèles mais non confondues** (c'est-à-dire si **$a b' = a' b$ et $c' b \neq c b'$**)
Il n'y a pas de point d'intersection entre les deux droites
Il n'y a **aucune solution** au système donc $S = \emptyset$
- Si $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont **sécantes** (c'est-à-dire si **$a' b \neq a b'$**)
Il n'y a qu'un seul point d'intersection entre les deux droites.
La **solution est unique** ce sont les coordonnées du point d'intersection de $(\mathcal{D})$ et de $(\mathcal{D}')$.
 $S = \{ (x_0 ; y_0) \}$

ATTENTION

Avant de se lancer dans la résolution graphique d'un système linéaire deux équations, deux inconnues , il convient de vérifier quel sera le nombre de solutions du système :

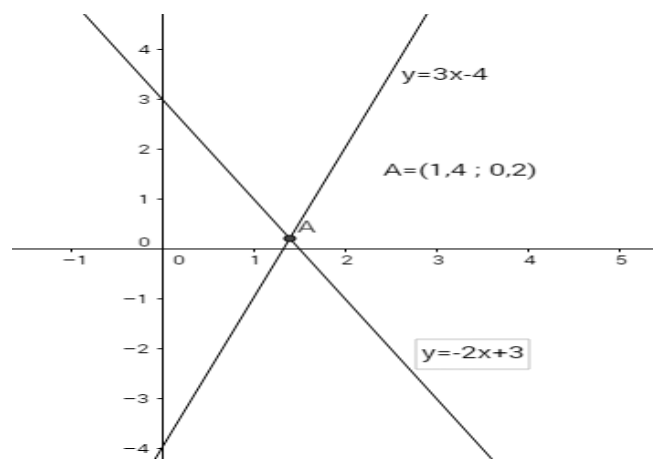
- si **$a' b = a b'$ et $c' b \neq c b'$** alors le système n'a pas de solution. $S = \emptyset$
Inutile de faire le dessin !
- si **$a' b = a b'$ et $c' b = c b'$** alors les deux droites sont confondues et le système a une infinité de solutions. La solution graphique est la droite toute entière.
Inutile de faire le dessin !
- si **$a b' \neq a' b$** alors le système a une unique solution, il faut alors tracer les droites et lire les coordonnées de leur point d'intersection.

Exemple résolu : Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$

$m = -2$ et $m' = 3$ donc le système a une unique solution.

On va tracer les droites d'équations $y = -2x + 3$ ET $y = 3x - 4$ dans un même repère.

Puis on lira les coordonnées du point d'intersection de ses deux droites.



on lit les coordonnées du point d'intersection.

$x = 1,4$ et $y = 0,2$

donc $S = \{(1,4 ; 0,2)\}$

Exemple : Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} 3x - 7y = 4 \\ -4x + 3y = 2 \end{cases}$

$$3x - 7y = 4 \Leftrightarrow y = \frac{3}{7}x - \frac{4}{7} \quad \text{et} \quad -4x + 3y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$$

$m = \frac{3}{7}$ et $m' = \frac{4}{3}$ donc le système a une unique solution.

On trace les droites dans le même repère.

On lit les coordonnées du point d'intersection $E(-1,4 ; -1,2)$ donc $S = \{(-1,4 ; -1,2)\}$

