

# CHAPITRE 7 CONTINUITÉ

## I. Notion de continuité :

### 1) Définition :

#### a) Continuité en un point et sur un intervalle :

On dira qu'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  est continue en un point  $a$  de  $I$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

On dira qu'une fonction  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  si  $f$  est continue en tout réel  $a$  de  $I$ .

#### b) Conséquence graphique :

Si une fonction est continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.

#### c) Continuité des fonctions usuelles :

Les fonctions usuelles ( ou de référence ) sont continues sur les intervalles qui constituent leur ensemble de définition.

Toutes les fonctions obtenues à partir des fonctions usuelles, par opérations ( somme, différence, produit, quotient ) ou composition sont continues sur les intervalles qui constituent leur ensemble de définition.

### 2) Continuité et dérivabilité :

Propriété admise : Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et soit  $a$  un réel de  $I$ .

Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $f$  est continue en  $a$ .

Si  $f$  est dérivable sur  $I$  alors  $f$  est continue sur  $I$ .

**ATTENTION :** La réciproque est fausse !

La fonction racine carrée est continue sur  $[0; +\infty[$  mais pas dérivable en 0.

Démonstration :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x}$ .

Continuité en 0 :

$f(0) = 0$  donc  $f$  est définie en 0 donc  $f$  est continue sur  $[0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

Quand  $h$  tend vers 0,  $\frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$  tend vers  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  donc  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

0 est une valeur interdite de  $f'(x)$  donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.

$f$  est donc dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

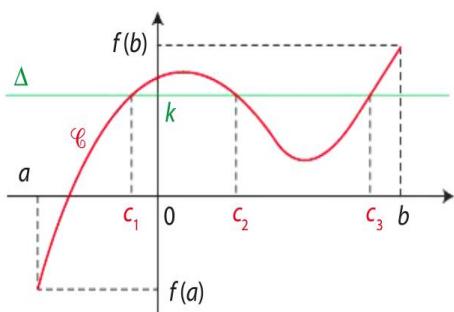
## II. Théorème des valeurs intermédiaires :

### 1) Théorème ( admis ) :

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et soit  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$ . Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel  $c$  compris entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = k$ .

Donc : l'équation  $f(x) = k$  admet au moins une solution comprise entre  $a$  et  $b$ .

$f(x)$  prend au moins une fois toute valeur intermédiaire comprise entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .



$x$	$a$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$b$
variations de $f$		$f(a)$	$k$	$k$	$f(b)$

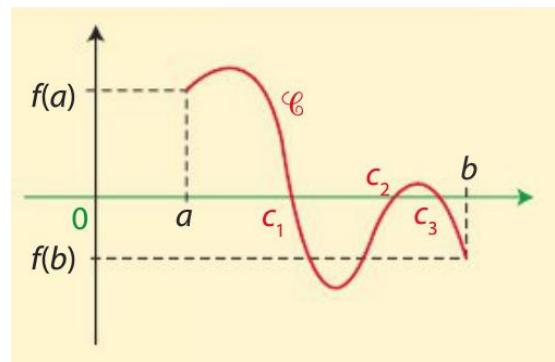
Conséquence graphique : la droite d'équation  $y = k$  coupe au moins une fois la courbe représentative de  $f$  en un point dont l'abscisse est comprise entre  $a$  et  $b$ .

Cas particulier :  $k = 0$ .

Pour montrer que 0 est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  on peut dire que :

$f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires ou que le produit  $f(a) \times f(b)$  est alors négatif.

Si c'est le cas, on en déduira qu'il existe au moins un réel  $c$  compris entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = 0$ .

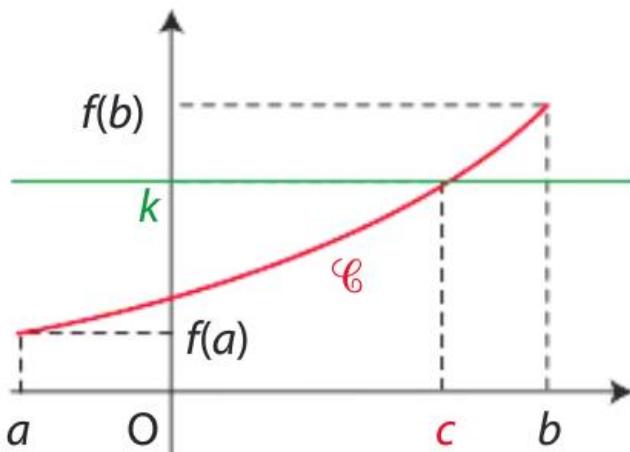


### 2) Cas des fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle :

#### Théorème de la valeur intermédiaire :

Soit  $f$  une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle  $[a ; b]$  de  $\mathbb{R}$ . Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[a ; b]$ .

Exemple: si  $f$  est strictement croissante sur  $[a ; b]$ .



$x$	a	<b>c</b>	b
variations de $f$			

Remarque : Si  $f$  est continue et strictement croissante ( respectivement décroissante ) sur  $[ a ; b ]$  on dit qu'elle réalise une bijection de l'intervalle  $[a ; b]$  sur l'intervalle  $[f(a) ; f(b)]$  ( respectivement  $[f(b) ; f(a)]$  ).

C'est pourquoi ce théorème porte aussi le nom de théorème de la bijection.

La fonction, qui, à tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , associe son unique antécédent, est la fonction réciproque de  $f$ , notée  $f^{-1}$ .

Convention : **Les flèches d'un tableau de variation indiquent la continuité et la stricte monotonie de la fonction .**

Exemple : Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-5 ; 5]$  par  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$

1) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $[-5 ; 5]$ .

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 3) - 2x(2x)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-2x^2 + 6}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2(3 - x^2)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)}{(x^2 + 3)^2}$$

$(x^2 + 3)^2 > 0$  et  $2 > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $3 - x^2$ .

$x$	-5	$-\sqrt{3}$	$\alpha$	$\sqrt{3}$	$\beta$	5
signe de $3 - x^2$	-	0	+	0	-	
signe de $f'(x)$	-	0	+	0	-	
variations de $f$	$-\frac{5}{14}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0,4	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0,4	$\frac{5}{14}$

2) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0,4$  admet exactement deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  dont on déterminera un encadrement à  $10^{-2}$  près.

La fonction  $f$  est donc continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $[-5 ; -\sqrt{3}]$

Le maximum de  $f$  sur cet intervalle est  $-\frac{5}{14} \approx -0,357$

Donc il n'existe aucune solution à l'équation  $f(x) = 0,4$  dans  $[-5 ; -\sqrt{3}]$ .

La fonction  $f$  est donc continue et strictement croissante sur l'intervalle  $[-\sqrt{3} ; \sqrt{3}]$ .

$$f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0,577 ; f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577 \text{ et } 0,4 \in [-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}]$$

Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe donc un unique réel  $\alpha$  appartenant à  $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$  tel que  $f(\alpha) = 0,4$ .

La fonction  $f$  est donc continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $[\sqrt{3}; 5]$ .  
 $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577$  ;  $f(5) = \frac{5}{14} \approx 0,357$  et  $0,4 \in [\frac{5}{14}; \frac{\sqrt{3}}{3}]$ .

Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe donc un unique réel  $\beta$  appartenant à  $[\sqrt{3}; 5]$  tel que  $f(\beta) = 0,4$ .

Donc sur  $[-5; 5]$   $f(x) = 0,4$  admet exactement deux solutions.

D'après la calculette,  $0 < \alpha < 1$  ;  $0,6 < \alpha < 0,7$  ;  $0,69 < \alpha < 0,70$

$4 < \beta < 5$  ;  $4,3 < \beta < 4,4$  ;  $4,30 < \beta < 4,31$

### 3) Extension du théorème de la valeur intermédiaire à des intervalles non fermés ou non bornés :

•  $I = [a; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$x$	$a$	$c$	$+\infty$
$f$	$f(a)$	$k$	$+\infty$

Pour tout nombre réel  $k \geq f(a)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une **unique** solution  $c$  dans l'intervalle  $[a; +\infty[$ .

•  $I = [a; b[$

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \ell$$

$x$	$a$	$c$	$b$
$f$	$f(a)$	$k$	$\ell$

Pour tout nombre réel  $k$  dans  $[f(a); \ell[$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une **unique** solution  $c$  dans l'intervalle  $[a; b[$ .

•  $I = ]-\infty; b[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$$

$x$	$-\infty$	$c$	$b$
$f$	$\ell$	$k$	$-\infty$

Pour tout nombre réel  $k < \ell$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une **unique** solution  $c$  dans l'intervalle  $]-\infty; b[$ .

Exemple : Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{3e^x}{e^x + 5}$

1) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = \frac{3e^x(e^x + 5) - 3e^x(e^x)}{(e^x + 5)^2} = \frac{3e^{2x} + 15e^x - 3e^{2x}}{(e^x + 5)^2} = \frac{15e^x}{(e^x + 5)^2}$$

$(e^x + 5)^2 > 0$  et  $15e^x > 0$  donc  $f'(x)$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+		
variations de $f$			

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 5 = 5$  donc par quotient  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$$f(x) = \frac{3e^x}{e^x + 5} = \frac{3e^x}{e^x(1 + \frac{5}{e^x})} = \frac{3}{1 + \frac{5}{e^x}}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{5}{e^x} = 1$  donc par quotient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

- 2) Démontrer que l'équation  $f(x) = 2$  admet une seule solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .  
dont on déterminera une valeur approchée à  $10^{-1}$  près.

La fonction  $f$  est donc continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \text{ et } 2 \in [0; 3].$$

Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe donc un unique réel  $\alpha$  appartenant à  $\mathbb{R}$  tel que  $f(\alpha) = 2$ .

D'après la calculette,  $2 < \alpha < 3$  ;  $2,3 < \alpha < 2,4$  ;  $2,30 < \alpha < 2,31$  donc  $\alpha \approx 2,3$

### III. Applications :

#### 1) Résolution d'équations :

Le théorème de la valeur intermédiaire va permettre de justifier de l'existence et du nombre de solutions d'une équation. On pourra ensuite en donner des valeurs approchées grâce à la calculette.

Exemple :

Montrer que l'équation  $-x^3 + 3x^2 + 1 = 0$  possède une unique solution dans l'intervalle  $[2 ; 4]$ .  
On donnera une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de la solution.

On pose  $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$  et on étudie cette fonction sur  $[2 ; 4]$ .

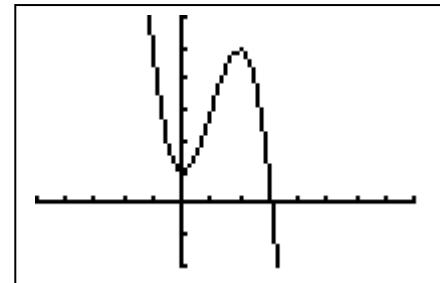
$f$  est continue sur  $[2 ; 4]$  comme somme de fonctions polynômes continues sur  $[2 ; 4]$ .

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x + 2) \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Sur  $[2 ; 4]$   $3x > 0$  et  $-x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 2$  donc sur  $[2 ; 4]$   $-x + 2 < 0$

Tableau de variations :

$x$	2	$\alpha$	4
signe de $3x$	+		
signe de $-x + 2$	-		
signe de $f'(x)$	0	-	
variations de $f$	5	0	-15



La fonction  $f$  est donc continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $[2 ; 4]$ .

$$f(2) = 5 \text{ et } f(4) = -15. 0 \in [-15 ; 5].$$

Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe donc un unique réel  $\alpha$  appartenant à  $[2 ; 4]$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

$\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $-x^3 + 3x^2 + 1 = 0$ .

Pour encadrer  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près on utilise la table de la calculette.

On sait que  $2 < \alpha < 4$ .

Avec un pas de 0,1 on a  $3,1 < \alpha < 3,2$ .

Avec un pas de 0,01 on a  $3,10 < \alpha < 3,11$ .

X	Y <sub>1</sub>
2,8	2,568
2,9	1,841
3	1
3,1	0,039
3,2	-1,048
3,3	-2,267
3,4	-3,624

$$Y_1 = 0,039$$

X	Y <sub>1</sub>
3,05	53488
3,06	43818
3,07	34026
3,08	24109
3,09	14067
3,1	0,039
3,11	-0,0639

$$Y_1 = 0,039$$

On en déduit donc que  $\alpha \approx 3,1$  à  $10^{-1}$  près.

Remarque :

Pour pouvoir donner une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $\alpha$ ,  
il faudra trouver un encadrement à  $10^{-2}$  près de  $\alpha$ .