CHAPITRE 7 CONTINUITE

I. Notion de continuité:

1) Définition :

a) Continuité en un point et sur un intervalle :

On dira qu'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est continue en un point a de I si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

On dira qu'une fonction f est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si f est continue en tout réel a de I.

b) Conséquence graphique :

Si une fonction est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.

c) Continuité des fonctions usuelles :

Les fonctions usuelles (ou de référence) sont continues sur les intervalles qui constituent leur ensemble de définition.
Toutes les fonctions obtenues à partir des fonctions usuelles, par opérations (somme, différence, produit , quotient) ou composition sont continues sur les intervalles qui constituent leur ensemble dedéfinition.

2) Continuité et dérivabilité :

Propriété admise : **Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a un réel de I.**
Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

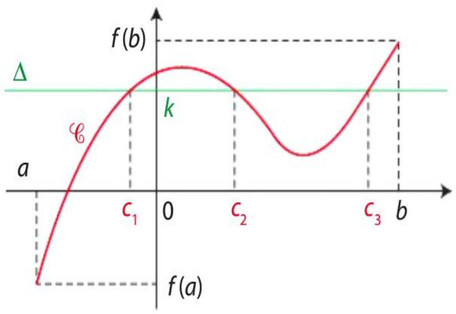
ATTENTION : La réciproque est fausse !

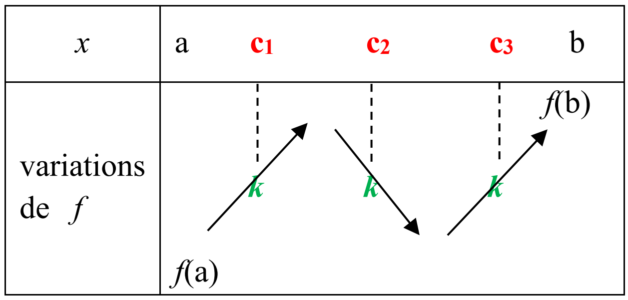
La fonction racine carrée est continue sur $[0 ; + \infty [$ mais pas dérivable en 0.
Démonstration :

II. Théorème des valeurs intermédiaires :

1) Théorème (admis) :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a et b deux réels de I.
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que f(c) = k.
Donc : l'équation $f(x)$ = k admet au moins une solution comprise entre a et b.
$f(x)$ prend au moins une fois toute valeur intermédiaire comprise entre f(a) et f(b).

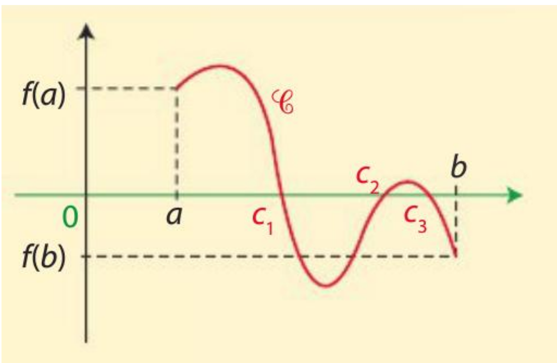




Conséquence graphique : la droite d'équation y = k coupe au moins une fois la courbe représentative de f en un point dont l'abscisse est comprise entre a et b.

Cas particulier : k = 0.

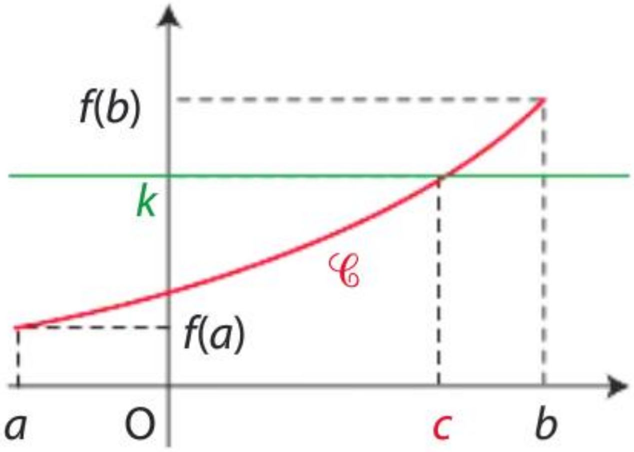
Pour montrer que 0 est compris entre f(a) et f(b) on peut dire que :
f(a) et f(b) sont de signes contraires ou que le produit $f(a) \times f(b)$ est alors négatif.
Si c'est le cas, on en déduira qu'il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que f(c) = 0.



2) Cas des fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle :

Théorème de la valeur intermédiaire :
Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle [a ; b] de $\mathbb{R}$.
Pour tout réel k compris entre f (a) et f (b), l'équation $f(x)$ = k admet une unique solution dans l'intervalle [a ; b].

Exemple: si f est strictement croissante sur [a ; b].



x	a	c	b
variations de f	f(a)	k	f(b)

Remarque : Si f est continue et strictement croissante (respectivement décroissante) sur [a ; b] on dit qu'elle réalise une bijection de l'intervalle [a ; b] sur l'intervalle [f(a) ; f(b)] (respectivement [f(b) ; f(a)]).
C'est pourquoi ce théorème porte aussi le nom de théorème de la bijection.
La fonction, qui, a tout réel k compris entre f(a) et f(b), associe son unique antécédent, est la fonction réciproque de f, notée f^{-1}.

Convention : **Les flèches d'un tableau de variation indiquent la continuité et la stricte monotonie de la fonction .**

Exemple : Soit f la fonction définie sur [– 5 ; 5] par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 3}$

1) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur [– 5 ; 5].

x	
signe de …………	
signe de $f'(x)$	
variations de f	

2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0{,}4$ admet exactement deux solutions α et β dont on déterminera un encadrement à 10^{-2} près.

3) Extension du théorème de la valeur intermédiaire à des intervalles non fermés ou non bornés :

• $I = [a\,;+\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

x	a	c	$+\infty$
f	$f(a)$	k	$+\infty$

Pour tout nombre réel $k \geqslant f(a)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution c dans l'intervalle $[a\,;+\infty[$.

• $I = [a\,;b[$

$\lim\limits_{x \to b} f(x) = \ell$

x	a	c	b
f	$f(a)$	k	ℓ

Pour tout nombre réel k dans $[f(a)\,;\ell[$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution c dans l'intervalle $[a\,;b[$.

• $I =]-\infty\,;b[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ et

$\lim\limits_{x \to b} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$	c	b
f	ℓ	k	$-\infty$

Pour tout nombre réel $k < \ell$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution c dans l'intervalle $]-\infty\,;b[$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3e^x}{e^x + 5}$

1) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[\,2\,;+\infty\,[$.

x	
signe de $f'(x)$	
variations de f	

2) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$.
dont on déterminera une valeur approchée à 10^{-1} près.

III. Applications :

1) Résolution d'équations :

Le théorème de la valeur intermédiaire va permettre de justifier de l'existence et du nombre de solutions d'une équation. On pourra ensuite en donner des valeurs approchées grâce à la calculette.

Exemple :

Montrer que l'équation $-x^3 + 3x^2 + 1 = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle [2 ; 4].
On donnera une valeur approchée à 10^{-1} près de la solution.

Remarque :

Pour pouvoir donner une valeur approchée à 10^{-1} près de α ,
il faudra trouver un encadrement à 10^{-2} près de α.

2) Suites et continuité :

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$
(u_n) est une suite de termes appartenant à I.
a est un réel appartenant à I.
Si (u_n) est une suite convergente vers a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$.

Exemple : (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{4n}{n+1}$.

f est la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

2) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

3) On pose (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = f(u_n)$.
   Que peut-on dire de la suite (v_n) ?

3) Théorème du point fixe :

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans I.

(u_n) est une suite de premier terme u_0 appartenant à I telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

ℓ est un réel appartenant à I.

Si (u_n) est une suite convergente vers ℓ alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple : (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

1) Etudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite que l'on notera ℓ.

4) Déterminer la valeur de ℓ.