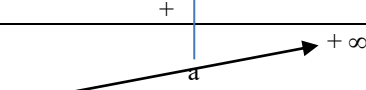


LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

I. Définition et conséquences :

1) Définition :

On connaît le tableau de variations de la fonction exponentielle.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
signe de e^x		+	
variations de e^x			

Soit a un réel strictement positif.

On sait que la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et } a \in]0 ; +\infty[.$$

donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique réel α tel que $e^\alpha = a$.

Ce réel α sera appelé **logarithme népérien de a** .

Conclusion : $e^x = a$ avec $a > 0 \Leftrightarrow x = \ln a$.

Exemples :

$e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1)$	Or $e^0 = 1$ donc	$x = \ln(1) = 0$
$e^x = e \Leftrightarrow x = \ln(e)$	Or $e = e^1$ donc	$x = \ln(e) = 1$

2) Conséquences algébriques :

$$e^x = a \text{ avec } a > 0 \Leftrightarrow x = \ln a \text{ donc } e^{\ln a} = a \text{ et } x = \ln e^x$$

On en déduit que :

$$e^{\ln x} = x \text{ pour tout } x > 0 \text{ et } \ln(e^x) = x \text{ pour tout réel } x.$$

Exemple : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $e^{6-3x} = 8$.

$$e^{6-3x} = 8 \Leftrightarrow 6 - 3x = \ln 8 \Leftrightarrow -3x = \ln 8 - 6 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}(\ln 8 - 6)$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{3}(\ln 8 - 6) \right\}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $e^{2x+7} = -5$

$$e^{2x+7} > 0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ donc pas de solution } S = \emptyset.$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $e^{2x} - 3e^x + 1 > 0$

$$\text{Posons } X = e^x \text{ on a alors } X^2 - 3X + 1 > 0$$

$$\Delta = 9 - 4 = 5 \quad X_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$e^{x_1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad e^{x_2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \ln\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{et} \quad x_2 = \ln\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
signe de $e^{2x} - 3e^x + 1$		+	-	+
		signe de a	signe de -a	signe de a
		0	0	

$$\text{Donc } S =]-\infty ; \ln\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)[\cup]\ln\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) ; +\infty[$$

II. Etude de la fonction $\ln$:

1) Définition de la fonction logarithme népérien :

On appelle fonction logarithme népérien la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = \ln x$.

2) Dérivabilité et continuité de la fonction $\ln$:

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Toute fonction dérivable étant continue, la fonction $\ln$ sera continue sur $]0; +\infty[$.

De plus $x = e^{\ln x}$ pour $x > 0$ donc $(x)' = (e^{\ln x})'$ donc $1 = (\ln x)' e^{\ln x}$ donc $1 = (\ln x)' \times x$ donc $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.

3) Sens de variation :

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ donc $(\ln x)' > 0$

donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$		+
variations de la fonction $\ln$	$-\infty$	$+\infty$

4) Limites de la fonction $\ln$:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ (admise)

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ (admise)

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$

Démonstration : Pour tout $x > 0$, on pose $X = \ln(x)$ donc $x = e^X$.
Quand x tend vers 0^+ , X tend vers $-\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ pour n entier naturel, $n > 0$

Démonstration : Pour tout $x > 0$, on pose $X = \ln(x)$ donc $x = e^X$.
Quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0$.

5) Signe de la fonction $\ln$:

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		θ	
Signe de $\ln(x)$	-	0	+

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et s'annule pour $x = 1$ donc

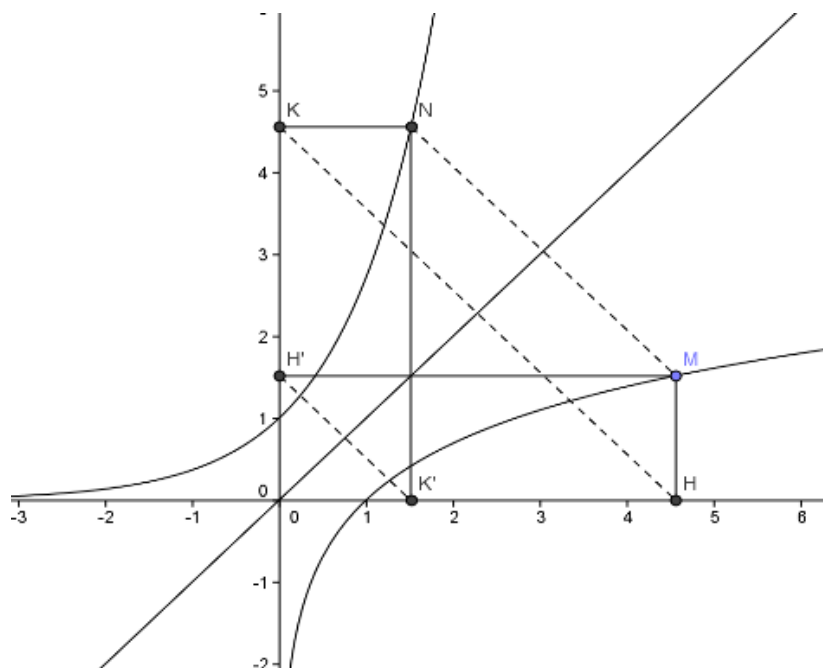
$$\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0; 1[$$

$$\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[$$

6) Conséquences graphiques :

- a) Dans un repère orthonormal, la courbe de la fonction $\ln$ et celle de la fonction $\exp$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première diagonale).



- b) On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est une asymptote verticale à la courbe de la fonction $\ln$.

- c) $f(x) = \ln x$; $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $f''(x) < 0$ sur $] 0 ; +\infty [$
donc f est concave sur $] 0 ; +\infty [$. **La fonction logarithme népérien est concave sur $] 0 ; +\infty [$.**

III. Relations fonctionnelles de la fonction $\ln$:

Elles découlent des propriétés de la fonction exponentielle.

- 1) **Pour tout $a > 0$ et $b > 0$ $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.**

Posons $A = \ln(ab)$. $e^A = ab$. Posons $B = \ln a + \ln b$ $e^B = e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$.
Donc $e^A = e^B$ donc $A = B$.

- 2) **Pour tout $a > 0$ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.**

$\frac{1}{a} \times a = 1$ donc $\ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln 1 = 0$ donc $\ln \frac{1}{a} + \ln a = 0$ donc $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.

- 3) **Pour tout $a > 0$ et $b > 0$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$**

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

4) **Pour tout $a > 0$ et n entier relatif, $\ln(a^n) = n \ln a$.**

Si $n = 2$ $a^2 = a \times a$ donc $\ln(a^2) = \ln a + \ln a = 2 \ln a$

Si $n = 3$ $a^3 = a^2 \times a$ donc $\ln(a^3) = \ln a^2 + \ln a = 2 \ln a + \ln a = 3 \ln a \dots$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on fait une récurrence : $(P_n) : \ln(a^n) = n \ln(a)$

Initialisation : $n = 0$ $\ln(a^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(a)$ donc (P_0) est vraie.

Hérédité : Soit un entier naturel k tel que P_k est vraie càd que $\ln(a^k) = k \ln(a)$

Démontrons qu'alors la propriété est vraie au rang $k + 1$.

$$\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k \times a) = \ln(a^k) + \ln(a) = k \ln(a) + \ln(a) = (k+1) \ln(a)$$

Donc P_{k+1} est vérifiée.

Conclusion : (P_0) est vraie, (P_n) est héréditaire donc pour $n \in \mathbb{N}$, $\ln(a^n) = n \ln(a)$.

Si n est un entier négatif, alors $-n \in \mathbb{N}$. Donc $\ln(a^{-n}) = -n \ln(a)$

$$\text{Or } \ln(a^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{a^n}\right) = -\ln(a^n) \text{ donc } -\ln(a^n) = -n \ln(a).$$

donc pour n entier négatif on a $\ln(a^n) = n \ln(a)$.

Conclusion : **Pour tout $a > 0$ et n entier relatif, $\ln(a^n) = n \ln a$.**

5) **Pour tout $a > 0$ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$**

$$(\sqrt{a})^2 = a \text{ donc } \ln(\sqrt{a})^2 = \ln a \text{ donc } 2 \ln(\sqrt{a}) = \ln a \text{ donc } \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$$

IV. Etude de la fonction $\ln(u(x))$:

1) Ensemble de définition :

$\ln(u(x))$ n'existe que si $u(x) > 0$ donc

Pour trouver l'ensemble de définition de la fonction $\ln(u(x))$

il faut résoudre l'inéquation $u(x) > 0$.

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'ensemble de définition de la fonction $\ln(u(x))$.

Exemple : Donner l'ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \ln(3 - 5x)$

$$3 - 5x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{5} \text{ donc } D_f =] - \infty ; \frac{3}{5} [.$$

2) Dérivée de la fonction $\ln(u(x))$:

Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I alors la fonction $\ln(u(x))$ est

dérivable sur I et on a : $[\ln(u(x))] ' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Exemple : Etudier sur $] - \infty ; \frac{3}{5} [$ la fonction f définie par : $f(x) = \ln(3 - 5x)$

Calcul de la dérivée : Posons $u(x) = 3 - 5x$ et $u'(x) = -5$ alors $f'(x) = \frac{-5}{3 - 5x}$.

Signe de $f'(x)$: Sur $] - \infty ; \frac{3}{5} [$ $3 - 5x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de -5 donc négative.

Remarque : La fonction $x \rightarrow \ln(u(x))$ a les mêmes variations que la fonction u .

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{3}{5}$
Signe de $f'(x)$	-	
Variations de f		

Limites :

Posons $X = 3 - 5x$. Quand x tend vers $-\infty$, $3 - 5x$ tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(3 - 5x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty.$$

Quand x tend vers $\frac{3}{5}$, $x < \frac{3}{5}$, $3 - 5x$ tend vers 0^+ .

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{5}} \ln(3 - 5x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty.$$

3) Résolution d'équations et d'inéquations avec la fonction $\ln$:

La fonction $\ln$ étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$ on a :

Si $x > 0$ et si $y > 0$

$$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$$

Exemples :

1) Résoudre $\ln(2x - 3) = \ln(5 - x)$

Il faut d'abord déterminer l'ensemble de définition de l'équation :

Il faut donc chercher les x tels que $2x - 3 > 0$ **et** $5 - x > 0$.

$$2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad 5 - x > 0 \Leftrightarrow x < 5 \quad \text{donc} \quad D =]\frac{3}{2}; 5[.$$

On résout ensuite l'équation de départ :

$$\ln(2x - 3) = \ln(5 - x) \Leftrightarrow 2x - 3 = 5 - x \Leftrightarrow 3x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

Il faut ensuite vérifier que la solution est dans l'ensemble de définition

$$\frac{8}{3} \approx 2,7 \quad \text{donc} \quad \frac{8}{3} \in]\frac{3}{2}; 5[\quad \text{donc} \quad \frac{8}{3} \text{ est la solution.} \quad S = \left\{ \frac{8}{3} \right\}$$

2) Résoudre $\ln\left(\frac{1}{3}x - 5\right) \leq 2$

Il faut d'abord déterminer l'ensemble de définition de l'inéquation :

Il faut donc chercher les x tels que $\frac{1}{3}x - 5 > 0$.

$$\frac{1}{3}x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 15 \quad \text{donc} \quad D =]15; +\infty[.$$

On résout ensuite l'inéquation de départ :

$$\ln\left(\frac{1}{3}x - 5\right) \leq 2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{3}x - 5\right) \leq \ln(e^2) \Leftrightarrow \frac{1}{3}x - 5 \leq e^2 \Leftrightarrow x \leq 3(e^2 + 5) \Leftrightarrow x \leq 3e^2 + 15.$$

Il faut ensuite prendre uniquement les solutions qui sont dans l'ensemble de définition

$$3e^2 + 15 \approx 37 \quad \text{donc} \quad \text{l'ensemble des solutions est} \quad S =]15; 3e^2 + 15].$$

3) Déterminer les entiers naturels n tels que $0,5^n \leq 0,003$

$$0,5^n \leq 0,003 \Leftrightarrow \ln(0,5^n) \leq \ln(0,003)$$

car la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\Leftrightarrow n \ln(0,5) \leq \ln(0,003)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,003)}{\ln(0,5)} \quad \text{car} \quad \ln(0,5) \text{ est un nombre négatif.}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 8,38$$

Les solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à 9.