EQUATIONS DE DROITES   SYSTEMES D'EQUATIONS

I Les différentes équations de droites :

1) Equation réduite d'une droite :

Une fonction affine $f(x) = \text{m}\,x + \text{p}$ est représentée par une droite d'équation **$y = \text{m}\,x + \text{p}$.**
Cette équation est une **équation réduite** de la droite .

Si m = 0 $y = \text{p}$ est l'équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.
Si p = 0 $y = \text{m}x$ est l'équation réduite d'une droite passant par l'origine.
Si m ≠ 0 et p ≠ 0 $y = \text{m}x + \text{p}$ est l'équation réduite d'une droite oblique.

Il existe aussi des droites qui sont parallèles à l'axe des ordonnées.
Tous les points de ce type de droite ont la même abscisse donc **l'équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées est : $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.**
Attention : Ce type de droite ne représente pas une fonction !

Comment calculer l'équation réduite d'une droite connaissant les coordonnées de deux points:

Exemple : Retrouver par le calcul l'équation de la droite (AB) avec A (– 1 ; 2) et B(5 ; –3)

On procède comme pour retrouver la fonction affine telle que $f(-1) = 2$ et $f(5) = -3$.

Calcul du coefficient directeur $\text{m} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} =$

donc (AB) : $y =$ ………….. $x + \text{p}$

Calcul de l'ordonnée à l'origine: On remplace x et y dans l'équation par les coordonnées de A ou de B.

La droite (AB) admet donc pour équation réduite $y =$ ……………………………………….

2) Equation cartésienne d'une droite :

On appelle équation cartésienne d'une droite (d) une équation de (d) sous la forme $a\,x + b\,y + c = 0$.
Contrairement à l'équation réduite, l'équation cartésienne d'une droite n'est pas unique !

Il faut savoir passer d'une équation réduite à une équation cartésienne et inversement.

Exemple :   Transformer l'équation réduite $y = \dfrac{1}{2}x + 7$ en équation cartésienne.

Transformer l'équation cartésienne $5x - 3y + 2 = 0$ en équation réduite.

3) Vecteur directeur d'une droite :

On appelle vecteur directeur d'une droite (d) tout vecteur non nul $\vec{u}$ ayant la même direction que la droite (d).

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et (d) une droite du plan.

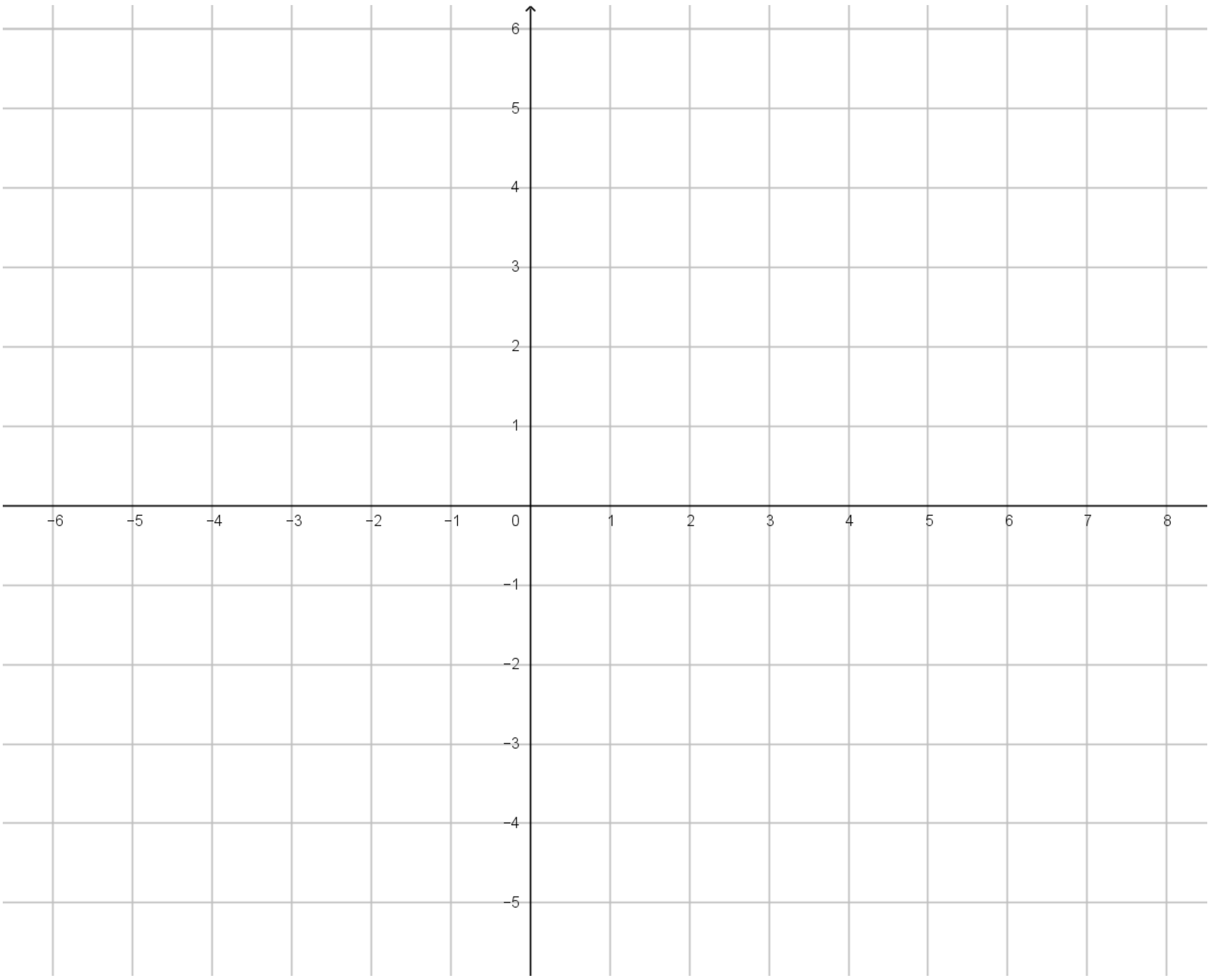
- si la droite (d) est une droite du plan parallèle à l'axe des abscisses, son équation est $y = k$, $k \in \mathbb{R}$ alors $\vec{i}$ est un vecteur directeur de (d).
- si la droite (d) est une droite du plan parallèle à l'axe des ordonnées, son équation est $x = k$, $k \in \mathbb{R}$ alors $\vec{j}$ est un vecteur directeur de (d).
- **si (d) est une droite du plan ni parallèle à l'axe des abscisses, ni parallèle à l'axe des ordonnées, alors l'équation réduite de (d) est $y = mx + p$ et un vecteur directeur est $\vec{u}\,(1\,;\,m)$ ou une équation cartésienne de (d) est $ax + by + c = 0$ et un vecteur directeur est $\vec{u}\,(-b\,;\,a)$.**

Exemples : Pour chacune des droites suivantes,

- tracer cette droite dans le repère ci-dessous
- déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur et tracer ce vecteur dans le repère.

$(d_1) : x = 4$ $(d_2) : y = -3$ $(d_3) : y = 2x - 5$ $(d_4) : 3x + 2y - 6 = 0$

$\vec{u}\,(\quad;\quad)$ $\vec{v}\,(\quad;\quad)$ $\vec{w}\,(\quad;\quad)$ $\vec{z}\,(\quad;\quad)$



4) Droites parallèles :

Deux droites seront parallèles si elles ont le même coefficient directeur ou des vecteurs directeurs colinéaires.

$\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x';y')$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ det $(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow x\,y' - y\,x' = 0 \Leftrightarrow x\,y' = y\,x'$

Remarques :

$a\,x + b\,y + c = 0$ est l'équation cartésienne de la droite ($\mathcal{D}$) et $y = m\,x + p$ son équation réduite.
$a'\,x + b'\,y + c' = 0$ est l'équation cartésienne de la droite ($\mathcal{D}'$) et $y = m'\,x + p'$ son équation réduite.

$a\,x + b\,y + c = 0 \Leftrightarrow b\,y =$ ……………………………… $\Leftrightarrow y =$ …………………………

Donc $m =$ ………… et $p =$ …………………..

De même $a'\,x + b'\,y + c' = 0 \Leftrightarrow y =$ …………………………

Donc $m' =$ ………… et $p' =$ …………………..

Si $m = m'$ alors ………………………… donc ………………………………..

Si $p = p'$ alors ………………………… donc ………………………………..

Le vecteur directeur de ($\mathcal{D}$) est $\vec{u}\,(-b\,;a)$ et le vecteur directeur de ($\mathcal{D}'$) est $\vec{u'}\,(-b'\,;a')$

$\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ …………………………….. $\Leftrightarrow$ ……………………………..

On retrouve la même égalité qu'avec $m = m'$.

On retiendra donc :

Deux droites seront **confondues** si elles ont la **même équation réduite** ou si **$a\,b' = a'\,b$ et $c\,b' = c'\,b$.**

Deux droites seront **strictement parallèles** si elles ont le même coefficient directeur
mais pas la même ordonnée à l'origine (**$m = m'$ et $p \neq p'$**) ou si **$a\,b' = a'\,b$ et $c'\,b \neq c\,b'$** .

Deux droites seront **sécantes** si elles n'ont pas le même coefficient directeur (**$m \neq m'$**)
ou si elles ont des vecteurs directeurs non colinéaires (**$a\,b' \neq a'\,b$**).
Elles n'ont alors qu'un **seul point d'intersection**.
Les coordonnées de ce point pourront être déterminées par la résolution d'un système d'équations.
Cette résolution pourra être graphique ou algébrique.

II Résolutions des systèmes linéaires :

1) Définitions :

a) On appelle équation linéaire à deux inconnues x et y une équation du type $a\,x + b\,y + c = 0$ avec a, b, c des réels quelconques.

b) Un système d'équations linéaires à deux inconnues x et y et à deux équations est de la forme
$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c' = 0 \end{cases}$$

c) Résoudre un système d'équations linéaires à deux inconnues x et y et à deux équations, c'est trouver tous les couples $(x\,;y)$ vérifiant simultanément les deux équations .

2) Résolution graphique d'un système linéaire:

Soit $\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c' = 0 \end{cases}$ un système à deux inconnues.

$a\,x + b\,y + c = 0$ est l'équation de la droite ($\mathcal{D}$).
$a'\,x + b'\,y + c' = 0$ est l'équation de la droite ($\mathcal{D}'$).

Les solutions du système sont les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

Plusieurs cas sont possibles :

- Si ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{D}'$) sont **confondues** (c'est-à-dire si **$a\,b' = a'\,b$ et $c\,b' = c'\,b$**)
  L'ensemble des solutions est la droite ($\mathcal{D}$) toute entière.
  Il y a une infinité de solutions : tous les couples de coordonnées vérifiant l'équation de ($\mathcal{D}$).
  $S = \{ (x\,;y) \text{ tels que } a\,x + b\,y + c = 0 \} = (\mathcal{D})$.

- Si ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{D}'$) sont **parallèles mais non confondues** (c'est-à-dire **si $a\,b' = a'\,b$ et $c'\,b \neq c\,b'$**)
  Il n'y a pas de point d'intersection entre les deux droites
  Il n'y a aucune solution au système donc $S = \varnothing$

- Si ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{D}'$) sont **sécantes** (c'est-à-dire **si $a'\,b \neq a\,b'$**)
  Il n'y a qu'un seul point d'intersection entre les deux droites.
  La solution est unique ce sont les coordonnées du point d'intersection de ($\mathcal{D}$) et de ($\mathcal{D}'$).
  $S = \{ (x_0\,;y_0) \}$

ATTENTION
Avant de se lancer dans la résolution graphique d'un système linéaire deux équations, deux inconnues , il convient de vérifier quel sera le nombre de solutions du système :

- **si $a'b = ab'$ et $c'b \neq cb'$** alors le système n'a pas de solution. $S = \varnothing$
  Inutile de faire le dessin !

- **si $a'b = ab'$ et $c'b = cb'$** alors les deux droites sont confondues et le système a une infinité de solutions. La solution graphique est la droite toute entière.
  Inutile de faire le dessin !

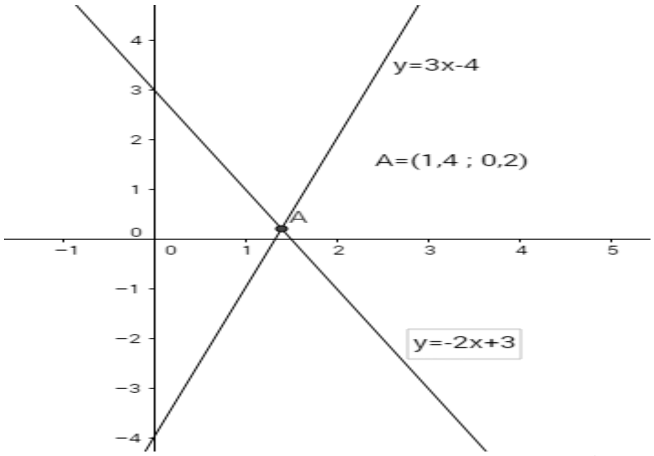
- **si $ab' \neq a'b$** alors le système a une unique solution, il faut alors tracer les droites et lire les coordonnées de leur point d'intersection.

<u>Exemple résolu</u> : Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} y = -2x+3 \\ y = 3x-4 \end{cases}$

m = – 2 et m' = 3 donc le système a une unique solution.

On va tracer les droites d'équations y = – 2x + 3 ET y = 3x – 4 dans un même repère.

Puis on lira les coordonnées du point d'intersection de ses deux droites.

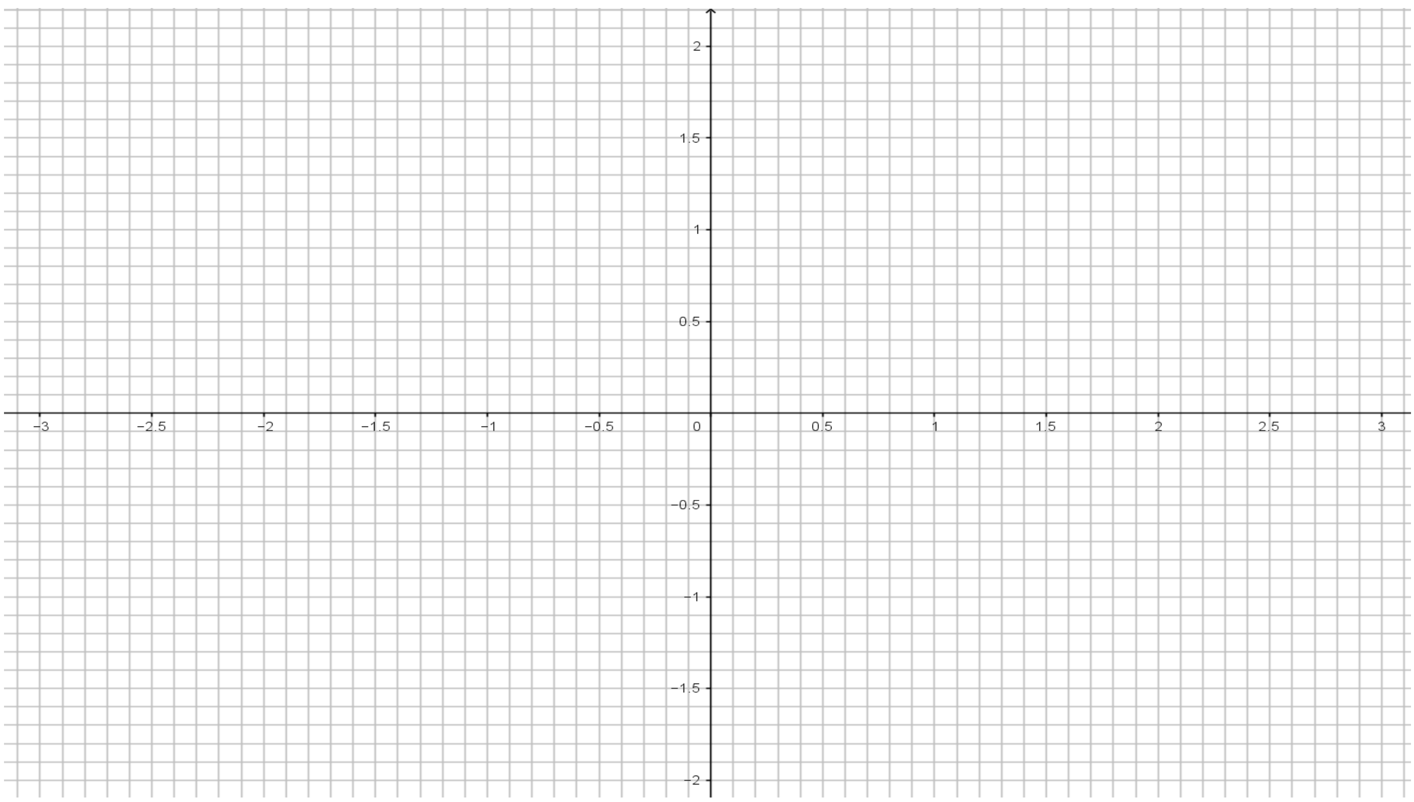


on lit les coordonnées du point d'intersection.

x = 1,4 et y = 0,2

donc S = {(1,4 ; 0,2)}

<u>Exemple</u> : Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} 3x - 7y = 4 \\ -4x + 3y = 2 \end{cases}$



3) **Résolution par le calcul (algébrique):**

$$(S)\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c' = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad (S)\begin{cases} y = m\,x + p \\ y = m'\,x + p' \end{cases}$$

- **Par comparaison :** $(S)\begin{cases} y = m\,x + p \\ y = m'\,x + p' \end{cases}$

Méthode de résolution par comparaison :

On vérifie que le système a une unique solution donc que $m \neq m'$.

On peut alors dire que $m\,x + p = m'\,x + p'$ ce qui permet de trouver x .

Il suffit alors de remplacer x par la valeur trouvée dans une des deux équations (la plus simple) pour trouver y .

On rédige une conclusion.

Exemple résolu : $(S) : \begin{cases} y = 5x + 9 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

Les deux équations de droites sont sous la forme $y = mx + p$.

$m = 5$ et $m' = -2$ donc le système a une unique solution.

Alors on peut dire que $5x + 9 = -2x + 2$ (on résout cette équation pour trouver la valeur de x)

$$5x + 2x = 2 - 9$$

$$7x = -7$$

$$\boldsymbol{x = -1}$$

Dans une des deux équations, on remplace x par -1 : $y = 5x + 9$ donc $y = 5 \times (-1) + 9 = 4$

La solution du système est : $S = \{(-1 ; 4)\}$

Exemple : Résoudre le système $(S) : \begin{cases} y = -4x + 7 \\ y = 7x - 15 \end{cases}$

Par substitution : (S) $\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c' = 0 \end{cases}$

Méthode de résolution par substitution :

On vérifie que le système n'a qu'une seule solution donc que a × b' ≠ a' × b.

On isole alors une inconnue dans la première équation et on l'exprime en fonction de l'autre inconnue.

On remplace cette inconnue par l'expression trouvée, dans la deuxième équation,
ce qui permet de n'avoir plus qu'une seule inconnue. On la calcule.

On remplace ensuite cette inconnue par sa valeur dans l'expression trouvée au b) pour déterminer la valeur de la dernière inconnue.

On rédige une conclusion.

Exemple résolu : Résoudre par substitution le système $\begin{cases} x - 6y = 4 \\ -4x + 3\,y = 5 \end{cases}$

a = 1 ; b = – 6 ; c = 4 et a' = – 4 ; b' = 3 ; c' = 5
a' b = – 4 × (– 6) = 24 et a b' = 1 × 3 = 3 a' b ≠ a b' donc il y a une unique solution.

On isole une inconnue (si possible l'inconnue où le coefficient est 1 afin d'éviter des calculs trop compliqués avec des fractions)

Je prends la 1^{ere} équation : $x - 6y = 4 \Leftrightarrow x = 6y + 4$

Dans la 2eme équation je remplace x par $6y + 4$:

$$\begin{aligned} -4\,x \quad + 3y &= 5 \\ -4(6y + 4) + 3y &= 5 \\ -24y - 16 + 3y &= 5 \quad \text{(je développe)} \\ -21y &= 21 \quad \text{(je résous)} \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Dans l'expression de x , je remplace y par – 1 : $x = 6y + 4 = 6 \times (-1) + 4 = -2$

Donc S = {(– 2 ; – 1)}

Exemple : Résoudre par substitution le système $\begin{cases} 3\,x - 7y = 4 \\ -4x + 3\,y = 2 \end{cases}$

- **Par élimination ou par combinaisons linéaires :** (S) $\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c' = 0 \end{cases}$

Méthode par élimination :

On vérifie que le système a une unique solution en vérifiant que $a'b \neq ab'$.

On multiplie chacune des deux équations par un coefficient bien choisi de manière à éliminer une inconnue après addition ou soustraction membre à membre des deux inconnues.

On détermine alors la valeur de l'inconnue qui reste.

Il suffit alors de remplacer cette inconnue par la valeur trouvée dans une des deux équations (la plus simple) pour trouver l'autre inconnue .

On rédige une conclusion.

Exemple résolu : Résoudre par combinaison le système $\begin{cases} 3x - 7y = 8 \\ -4x + 3y = 2 \end{cases}$

$a = 3$; $b = -7$; $c = 8$ et $a' = -4$; $b' = 3$; $c' = 2$
$a'b = -4 \times (-7) = 28$ et $ab' = 3 \times 3 = 9$ $a'b \neq ab'$ donc il y a une unique solution

Il faut que je décide si je veux "éliminer" les x ou les y ..
Je décide d'éliminer les x : il faut que je trouve un multiple de 3 et de 4 c'est-à-dire 12.

- Je vais multiplier **TOUTE** la 1ere équation par 4 (de façon à obtenir $12x$)
- Je vais multiplier **TOUTE** la 2eme équation par 3 (de façon à obtenir $-12x$)

On obtient $\begin{cases} 12x - 28y = 32 \\ -12x + 9y = 6 \end{cases}$

En ajoutant membre à membre (membre de gauche avec membre de gauche ET membre de droite avec membre de droite) :

$$12x - 28y - 12x + 9y = 32 + 6$$
$$-19y = 38$$
$$y = -2$$

Je remplace y par -2 dans une des équations (celle que l'on préfère)

$$3x - 7y = 8$$
$$3x - 7 \times (-2) = 8$$
$$3x + 14 = 8$$
$$3x = -6$$
$$x = -2$$

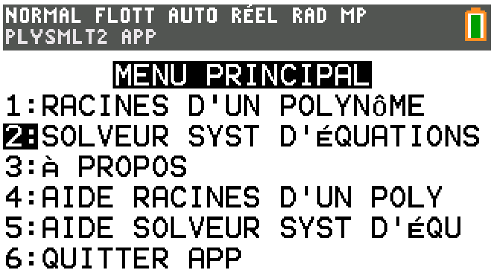
Donc $S = \{(-2\,;-2)\}$

Exemple : Résoudre par combinaison le système $\begin{cases} 2x - 5y = 6 \\ -5x + 10y = 3 \end{cases}$

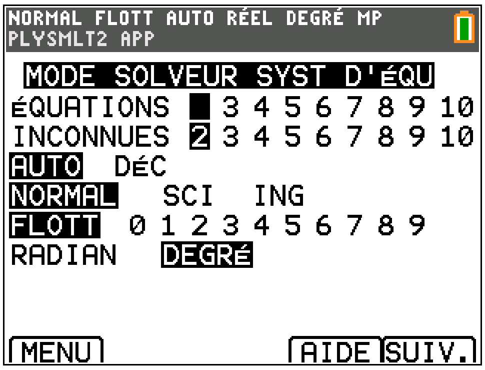
<u>Avec la calculette :</u>

Touche Resol

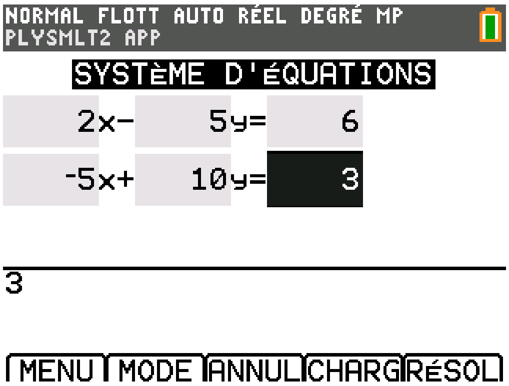
Choisir le menu 2.



Choisir le menu 2.



Choisir suivant en tapant sur graphe



On entre les coefficients et les signes en tapant sur la touche entrer à chaque fois.

Puis on valide en choisissant résol touche graphe