FICHE DE REVISIONS 1 La loi binomiale, les probabilités et les suites

Exercice 1 : 40 minutes

Métropole 8 septembre 2022 Exercice 2

Un hôtel situé à proximité d'un site touristique dédié à la préhistoire propose deux visites dans les environs, celle d'un musée et celle d'une grotte.

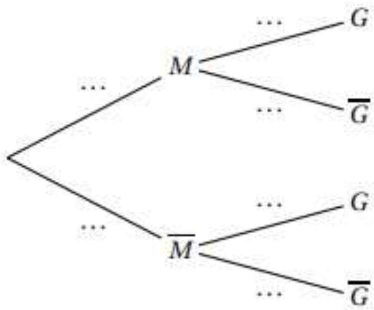
Une étude a montré que 70 % des clients de l'hôtel visitent le musée. De plus, parmi les clients visitant le musée, 60 % visitent la grotte.
Cette étude montre aussi que 6 % des clients de l'hôtel ne font aucune visite.
On interroge au hasard un client de l'hôtel et on note :

- M l'évènement : « le client visite le musée » ;
- G l'évènement : « le client visite la grotte ».

On note $\overline{M}$ l'évènement contraire de M, $\overline{G}$ l'évènement contraire de G, et pour tout évènement E, on note $p(E)$ la probabilité de E.
Ainsi, d'après l'énoncé, on a : $p\left(\overline{M}\cap\overline{G}\right) = 0,06$.

1. **a.** Vérifier que $p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0,2$, où $p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right)$ désigne la probabilité que le client interrogé ne visite pas la grotte sachant qu'il ne visite pas le musée.

b. L'arbre pondéré ci-contre modélise la situation. Recopier et compléter cet arbre en indiquant sur chaque branche la probabilité associée.



c. Quelle est la probabilité de l'évènement « le client visite la grotte et ne visite pas le musée » ?

d. Montrer que $p(G) = 0,66$.

2. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée. Cette affirmation est-elle exacte ?

3. Les tarifs pour les visites sont les suivants :

- visite du musée : 12 euros ;
- visite de la grotte : 5 euros.

On considère la variable aléatoire T qui modélise la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites.

a. Donner la loi de probabilité de T. On présentera les résultats sous la forme d'un tableau.

b. Calculer l'espérance mathématique de T.

c. Pour des questions de rentabilité, le responsable de l'hôtel estime que le montant moyen des recettes des visites doit être supérieur à 700 euros par jour.
Déterminer le nombre moyen de clients par journée permettant d'atteindre cet objectif.

4. Pour augmenter les recettes, le responsable souhaite que l'espérance de la variable aléatoire modélisant la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites passe à 15 euros, sans modifier le prix de visite du musée qui demeure à 12 euros.
Quel prix faut-il fixer pour la visite de la grotte afin d'atteindre cet objectif ? (On admettra que l'augmentation du prix d'entrée de la grotte ne modifie pas la fréquentation des deux sites).

5. On choisit au hasard 100 clients de l'hôtel, en assimilant ce choix à un tirage avec remise.
Quelle est la probabilité qu'au moins les trois quarts de ces clients aient visité la grotte à l'occasion de leur séjour à l'hôtel ?
On donnera une valeur du résultat à 10^{-3} près.

<u>Exercice 2 :</u> 50 minutes

Amérique du sud 26 septembre 2022 Sujet 2 Exercice 1

PARTIE A

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de $0,97$.
La probabilité qu'un danger se présente est de $0,01$ et la probabilité que l'alarme s'active est de $0,014\,65$.
On note A l'évènement « l'alarme s'active » et D l'événement « un danger se présente ».
On note $\overline{M}$ l'évènement contraire d'un évènement M et $P(M)$ la probabilité de l'évènement M.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
2. **a.** Calculer la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active.

   b. En déduire la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
3. Montrer que la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est $0,005$.
4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active.

   Montrer que la probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est inférieure à $0,01$.

PARTIE B

Une usine fabrique en grande quantité des systèmes d'alarme. On prélève successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
On note S l'évènement « l'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet que $P(S) = 0,005\,25$.
On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés.
Les résultats seront arrondis à 10^{-4}.

1. Donner la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement.
3. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement.

PARTIE C

Soit n un entier naturel non nul. On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à $0,07$.

<u>Exercice 3 :</u> 45 minutes

Asie 18 mai 2022 Sujet 1 Exercice 4

On s'intéresse au développement d'une bactérie.

Dans cet exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles.

Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.

Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.

On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :

$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n,

$$p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2.$$

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)

	A	B
1	n	p_n
2	0	0,3
3	1	
4	2	
5	3	0,407 695 62
6	4	0,416 351
7	5	0,421 343 71
8	6	0,424 271 37
9	7	0,426 004 33
10	8	0,427 035 78
11	9	0,427 651 69
12	10	0,428 020 18
13	11	0,428 240 89
14	12	0,428 373 18
15	13	0,428 452 51
16	14	0,428 500 09
17	15	0,428 528 63
18	16	0,428 545 75
19	17	0,428 556 02

a. Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 (masquées dans la feuille de calcul) et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.

b. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type?

c. Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n).

2. **a.** Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.

b. Justifier que la suite (p_n) est convergente.

3. On appelle L la limite de la suite (p_n).

a. Justifier que L est solution de l'équation

$$0,7x^2 - x + 0,3 = 0$$

b. Déterminer alors la limite de la suite (p_n).

6. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n).

```
1 def suite(n) :
2   p= ...
3   s=[p]
4   for i in range (...) :
5       p=...
6       s.append(p)
7   return (s)
```

Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4 et 5 de façon à ce que la fonction `suite (n)` retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

<u>Exercice 4 :</u> 35 minutes

Amérique du nord 19 mai 2022 Sujet 1 Exercice 1

Chaque chaque jour où il travaille, Paul doit se rendre à la gare pour rejoindre son lieu de travail en train. Pour cela, il prend son vélo deux fois sur trois et, si il ne prend pas son vélo, il prend sa voiture.

1. lorsqu'il prend son vélo pour rejoindre la gare, Paul ne rate le train qu'une fois sur 50 alors que, lorsqu'il prend sa voiture pour rejoindre la gare Paul rate son train une fois sur 10.
   On considère une journée au hasard lors de laquelle Paul sera à la gare pour prendre le train qui le conduira au travail.
   On note :
   - V l'évènement « Paul prend son vélo pour rejoindre la gare » ;
   - R l'évènement « Paul rate son train ».

   a. Faire un arbre pondéré résumant la situation.

   b. Montrer que la probabilité que Paul rate son train est égale à $\dfrac{7}{150}$.

   c. Paul a raté son train. Déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'il ait pris son vélo pour rejoindre la gare.

2. On choisit au hasard un mois pendant lequel Paul s'est rendu 20 jours à la gare pour rejoindre son lieu de travail selon les modalités décrites en préambule.
   On suppose que, pour chacun de ces 20 jours, le choix entre le vélo et la voiture est indépendant des choix des autres jours.
   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de jours où Paul prend son vélo sur ces 20 jours.

   a. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

   b. Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo exactement 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare ? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3}.

   c. Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo au moins 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare ? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3}.

   d. En moyenne, combien de jours sur une période choisie au hasard de 20 jours pour se rendre à la gare, Paul prend-il son vélo ? On arrondira la réponse à l'entier.

3. Dans le cas où Paul se rend à la gare en voiture, on note T la variable aléatoire donnant le temps de trajet nécessaire pour se rendre à la gare. La durée du trajet est donnée en minutes, arrondie à la minute. La loi de probabilité de T est donnée par le tableau ci-dessous :

k (en minutes)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(T = k)$	0,14	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0,10	0,08	0,07

   Déterminer l'espérance de la variable aléatoire T et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

<u>Exercice 5 :</u> 45 minutes

Amérique du nord 19 mai 2022 Sujet 2 Exercice 1

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à $0,84$;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à $0,76$.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

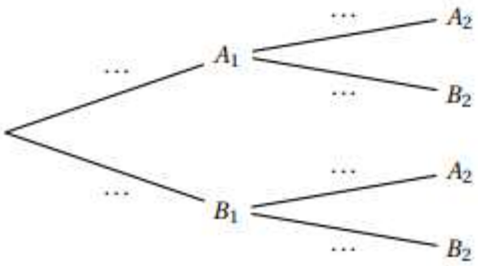
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

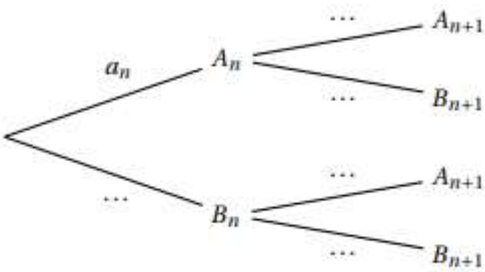
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



2. a. Calculer a_2.

   b. Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.

3. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



   b. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.
5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

FICHE DE REVISIONS 1 La loi binomiale, les probabilités et les suites CORRECTION

Exercice 1 : 40 minutes

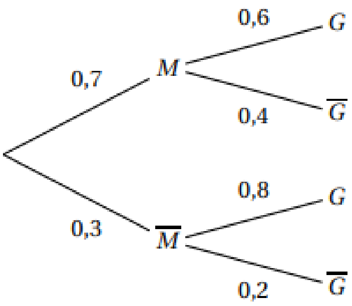
Métropole 8 septembre 2022 Exercice 2

1. **a.** On a $p(M) = 0,7$, donc $p\left(\overline{M}\right) = 1 - 0,7 = 0,3$.

Or $p\left(\overline{M} \cap \overline{G}\right) = 0,06 \iff p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right)$, soit

$0,06 = 0,3 \times p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) \iff p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0,2$.

b.



c. On calcule $p\left(\overline{M} \cap G\right) = p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(M) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$.

d. On a de même $p(M \cap G) = p(M) \times p_M(G) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p(G) = p(M \cap G) + p\left(\overline{M} \cap G\right) = 0,42 + 0,24 = 0,66$.

2. On calule $p_G(M) = \dfrac{p(G \cap M}{p(G)} = \dfrac{p(M \cap G}{p(G)} = \dfrac{0,42}{0,66} = \dfrac{42}{66} = \dfrac{21}{33} = \dfrac{7}{11} \approx 0,64 > 0,5$. L'affirmation est exacte.

3. **a.** On a le tableau de probabilités suivant :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	17	12	5	0

b. D'après le tableau précédent :

$E(T) = 17 \times 0,42 + 12 \times 0,28 + 5 \times 0,24 + 0 \times 0,06 = 7,14 + 3,36 + 1,2 = 11,7$.

Ceci signifie que sur un grand nombre de visiteurs la dépense moyenne par visiteur est égale à 11,70 €.

c. Soit x le nombre minimum de visiteurs , x doit vérifier :

$11,7 \times x > 700 \iff x > \dfrac{700}{11,7}$. Or $\dfrac{700}{11,7} \approx 59,8$.

Il faut donc qu'il y ait au moins 60 visiteurs.

4. Soit g le prix à payer pour visiter la grotte; le tableau de probabilités devient :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	12 + g	12	g	0

L'espérance devient :

$E = 0,42(12+g) + 12 \times 0,28 + 0,24 \times g + 0 \times 0,06 = 5,04 + 0,42g + 3,36 + 0,24g = 8,4 + 0,66g$.

Le responsable veut que :

$8,4 + 0,66g = 15 \iff 0,66g = 6,6 \iff g = 10$.

Le prix d'entrée à la grotte doit passer à 10 euros.

5. Le nombre de visiteurs étant suffisamment grand pour que le tirage puisse être considéré avec remise, on peut donc considérer que l'on effectue donc 100 tirages identiques et indépendants donc n = 100.
On appelle succès l'événement G : " le client a visité la grotte " et p = P(G) = 0,66.
On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
X suit donc une loi binomiale de paramètres n =100 et p = 0,66.
Il faut donc trouver $p(G > 75)$. La calculatrice donne $P(G \leqslant 75) \approx 0,9797$, donc $P(G > 75) \approx 1 - 0,9797$ soit environ 0,0203, donc 0,020 au millième près.

Exercice 2 : 50 minutes

Amérique du sud 26 septembre 2022 Sujet 2 Exercice 1

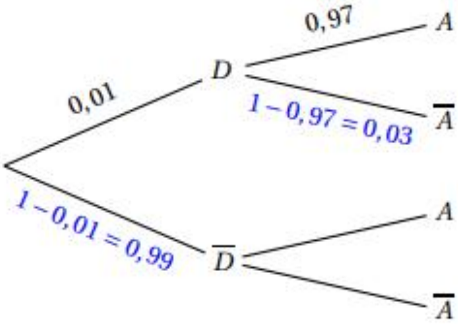
PARTIE A

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de 0,97. La probabilité qu'un danger se présente est de 0,01 et la probabilité que l'alarme s'active est de 0,014 65.

On note A l'évènement « l'alarme s'active » et D l'évènement « un danger se présente ».

On note $\overline{M}$ l'évènement contraire d'un évènement M et $P(M)$ la probabilité de l'évènement M.

1. On représenter les éléments de la situation que l'on connaît par un arbre pondéré.



2. **a.** La probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active est :
$P(D \cap A) = 0,01 \times 0,97 = 0,0097$.

b. On en déduit que la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active est : $P_A(D) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,0097}{0,01465} \approx 0,662$.

3. La probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est :

$P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)}$.

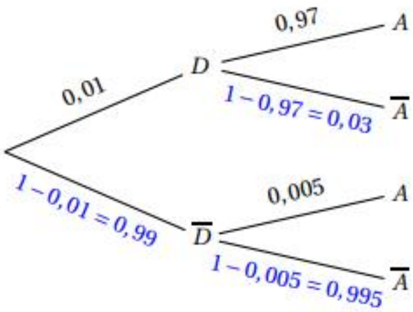
On sait que $P(A) = 0,01465$.

D'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P(D \cap A) + P\left(\overline{D} \cap A\right)$.

On déduit : $P(A) - P(D \cap A) = P\left(\overline{D} \cap A\right)$, donc $P\left(\overline{D} \cap A\right) = 0,01465 - 0,0097 = 0,00495$.

Donc $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{0,00495}{0,99} = 0,005$.

On peut compléter l'arbre :



4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active.

Cette situation est représentée par les événements $D \cap \overline{A}$ et $\overline{D} \cap A$.

La probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est donc :

$P\left(D \cap \overline{A}\right) + P\left(\overline{D} \cap A\right) = 0,01 \times 0,03 + 0,99 \times 0,005 = 0,00525 < 0,01$.

PARTIE B

Une usine fabrique en grande quantité des systèmes d'alarme. On prélève successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise. On note S l'évènement « l'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet que $P(S) = 0,00525$.

On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés.

1. On a une répétition de 5 épreuves considérées comme des tirages avec remise, on peut donc considérer que l'on effectue 5 tirages identiques et indépendants donc n = 5.
   On appelle succès l'événement S : " l'alarme ne fonctionne pas correctement " et p = P(S) = 0,00525.
   On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
   X suit donc une loi binomiale de paramètres n =5 et p = 0,00525.

2. La probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement est : $P(X=1) = \binom{5}{1} \times 0,00525^1 \times (1-0,00525)^{5-1} \approx 0,0257$.

3. La probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement est :
   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{5}{0} \times 0,00525^0 \times (1-0,00525)^5 = 0,0260$.

PARTIE C

Soit n un entier naturel non nul. On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

On cherche le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à 0,07.

Comme dans la partie B, la variable aléatoire Y qui donne le nombre de systèmes d'alarme défectueux suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,00525$.

On cherche n tel que $P(Y \geqslant 1) > 0,07$.

$P(Y \geqslant 1) > 0,07 \iff 1 - P(Y=0) > 0,07 \iff 0,93 > P(Y=0)$

$P(Y=0) < 0,93 \iff \binom{n}{0} \times 0,00525^0 \times (1-0,00525)^n < 0,93 \iff 0,99475^n < 0,93$

[redacted] donc il faut prélever au moins 14 systèmes d'alarme pour que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à 0,07.

Vérification à la calculatrice

- Pour $n = 13$, on trouve $P(Y \geqslant 1) \approx 0,0661 < 0,07$.
- Pour $n = 14$, on trouve $P(Y \geqslant 1) \approx 0,0710 > 0,07$.

<u>Exercice 3 :</u> 45 minutes

Asie 18 mai 2022 Sujet 1 Exercice 4

Dans cet exercice, on modélise le développement d'une bactérie avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles. Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.
On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :
$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2$.

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)

a.
- $p_1 = 0,3 + 0,7 \times 0,3^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,09 = 0,3 + 0,063 = 0,363$;
- $p_2 = 0,3 + 0,7 \times 0,363^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,131\,769 = 0,3 + 0,0922383 = 0,3922383$.

b. La probabilité d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type est égale à $1 - p_{10} = 1 - 0,42802018 = 0,57117182 \approx 0,571$ au millième près.

c. D'après le tableau la suite (p_n) semble être croissante et semble aussi avoir une limite puisque les quatre derniers résultats commencent par 0,428 5...

2. a. On veut démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.

Initialisation : On a $0 \leqslant 0,3 \leqslant 0,363 \leqslant 0,5$, soit $0 \leqslant p_0 \leqslant p_1 \leqslant 0,5$: la relation est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.

Si ces nombres positifs sont rangés dans dans cet ordre, leurs carrés aussi, soit
$0 \leqslant p_n^2 \leqslant p_{n+1}^2 \leqslant 0,5^2$, puis en multipliant par 0,7 :
$0 \leqslant 0,7 \times p_n^2 \leqslant 0,7 \times p_{n+1}^2 \leqslant 0,7 \times 0,5^2$ et enfin en ajoutant à chaque membre 0,3 :
$0,3 \leqslant 0,3 + 0,7 \times p_n^2 \leqslant 0,3 + 0,7 \times p_{n+1}^2 \leqslant 0,3 + 0,7 \times 0,5^2$, soit
$0,3 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,475$. On peut donc écrire :
$0 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,5$: la relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est encore vraie au rang $n+1$: d'après la principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$

b. Le résultat précédent montre que la suite (p_n) est croissante et majorée par 0,5 : elle est donc convergente vers une limite L telle que $L \leqslant 0,5$.

3. a. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \lim\limits_{n \to +\infty} p_{n+1} = L$, la relation de récurrence donne :

$$L = 0,3 + 0,7L^2 \iff 0,7L^2 - L + 0,3 = 0$$

L est solution de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$.

b. On a $\Delta = 1 - 4 \times 0,7 \times 0,3 = 1 - 0,84 = 0,16 = 0,4^2 > 0$. Il y a donc deux solutions :

$$L_1 = \frac{1 + 0,4}{2 \times 0,7} = 1, \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{1 - 0,4}{2 \times 0,7} = \frac{0,6}{1,4} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \approx 0,43$$

On ne peut retenir la solution L_1 puisque (p_n) est majorée par 0,5. Il reste donc L_2 : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{3}{7}$.

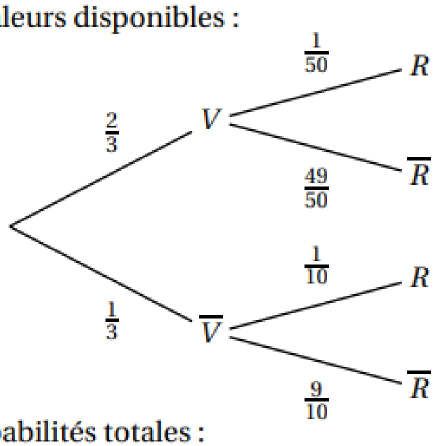
4. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n).
On complète, les lignes 2, 4 et 5 de cette fonction de façon à ce que la fonction `suite (n)` retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

```
1 def suite(n) :
2   p = 0.3
3   s = [p]
4   for i in range (n - 1)
5       p = 0.3+0.7*p*p
6       s.append(p)
7   return (s)
```

<u>Exercice 4 :</u> 35 minutes

Amérique du nord 19 mai 2022 Sujet 1 Exercice 1

1. **a.** L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. D'après la formule des probabilités totales :

$$p(R) = p(R \cap V) + p\left(R \cap \overline{V}\right) = p_V(R) \times p(V) + p_{\overline{V}}(R) \times p\left(\overline{V}\right) = \frac{1}{50} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{150}$$

c. On cherche la probabilité : $p_R(V)$.

D'après la formule de Bayes, $p_R(V) = \dfrac{p(R \cap V)}{p(R)} = \dfrac{\frac{1}{50} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{150}} = \dfrac{2}{7}$.

2. **a.** On a une répétition de 20 épreuves identiques et indépendants donc n = 20.

On appelle succès l'événement V : " Paul prend son vélo pour se rendre à la gare " et p = P(V) = $\frac{2}{3}$.

On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

X suit donc une loi binomiale de paramètres n =20 et p = $\frac{2}{3}$.

b. $p(X = 10) = \binom{20}{10} \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{20-10} \approx 0{,}054.$

c. $p(X \geqslant 10) = 1 - p(X < 10) = 1 - p(X \leqslant 9) \approx 0{,}962$

d. Calculons l'espérance $E(X)$ de cette loi binomiale : $E(X) = n \times p = 20 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3} \approx 13{,}333$

En moyenne, il se rendra à la gare en vélo 13,33 jours par mois soit 13 jours à l'unité près.

3. Calculons l'espérance de la loi de probabilité de T :

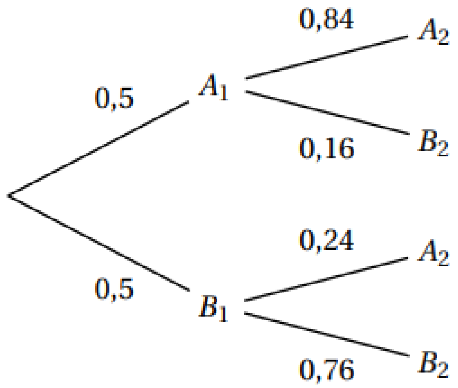
$E(t) = 0{,}14 \times 10 + 0{,}13 \times 11 + 0{,}13 \times 12 + 0{,}12 \times 13 + 0{,}12 \times 14 + 0{,}11 \times 15 + 0{,}10 \times 16 + 0{,}08 \times 17 + 0{,}07 \times 18$
$= 13{,}5$

Il mettra en moyenne 13 minutes et demie pour se rendre à la gare en voiture.

Exercice 5 : 45 minutes

Amérique du nord 19 mai 2022 Sujet 2 Exercice 1

1. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



2. a. Utilisons la formule des probabilités totales pour calculer $a_2 = p(A_2)$:

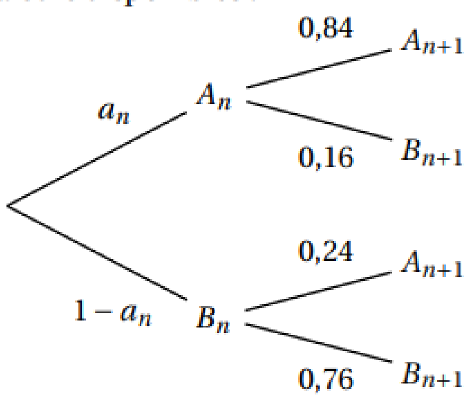
$a_2 = p(A_2 \cap A_1) + p(A_2 \cap B_1) = p_{A_1}(A_2) \times p(A_1) + p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)$
$= 0,84 \times 0,5 + 0,24 \times 0,5 = 0,54$. Donc $a_2 = 0,54$.

b. Utilisons la formule de Bayes pour calculer $p_{A_2}(B_1)$:

$$p_{A_2}(B_1) = \frac{p(A_2 \cap B_1)}{p(A_2)} = \frac{p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)}{p(A_2)} = \frac{0,24 \times 0,5}{0,54} \approx 0,222$$

3. a. On remarquera au préalable que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n + b_n = 1$.

L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. Utilisons là encore, la formule des probabilités totales pour déterminer a_{n+1} en fonction de a_n, pour tout entier naturel non nul :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n) = p_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n)$
$= 0,84 \times p(A_n) + 0,24 \times p(B_n) = 0,84\ a_n + 0,24\ b_n$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 1 - a_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = 0,84\ a_n + 0,24(1 - a_n) = 0,6\ a_n + 0,24$

c. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

Initialisation : $a_1 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{1-1} = 0,6 - 0,1 = 0,5$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

Montrons que $a_{n+1} = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n$.

D'après la question précédente,$a_{n+1} = 0,6\ a_n + 0,24$, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$a_{n+1} = 0,6\left(0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}\right) + 0,24 = 0,36 - 0,1 \times 0,6 \times 0,6^{n-1} + 0,24 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n$. On obtient ce qu'il fallait démontrer. L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

d. $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^{n-1} = 0$ car $0,6 \in]-1\,;\,1[$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,6$.

Cela signifie qu'au bout d'un certain temps, la probabilité qu'un vélo soit à la station A est de 60 %.

e. Résolvons : $a_n \geqslant 0,599$. $a_n \geqslant 0,599 \iff 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1} \geqslant 0,599$

$\iff -0,1 \times 0,6^{n-1} \geqslant -0,001 \iff 0,6^{n-1} \leqslant \dfrac{-0,001}{-0,1} \iff 0,6^{n-1} \leqslant \dfrac{1}{100}$.

[redacted]

À la calculatrice, [redacted] $n \geqslant 11$.

La probabilité que le vélo se trouve au point A est supérieure à $0,599$ à partir du 11-ième jour.