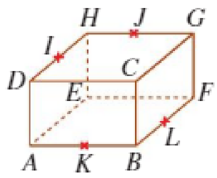
TSpé Révisions géométrie

Exercice 1:

Dans toutes les questions, on considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-contre. I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[DH]$, $[HG]$, $[AB]$ et $[BF]$



1 $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{FK}$ est égal à :
a) $\overrightarrow{FG}$ b) $\overrightarrow{AE}$ c) $\vec{0}$

2 $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{CG}$ est égal à :
a) $\overrightarrow{BD}$ b) $\overrightarrow{CH}$ c) $\vec{0}$

3 $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EG}$ est égal à :
a) $\overrightarrow{CG}$ b) $\overrightarrow{GC}$ c) $\vec{0}$

4 $\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{LF}$ est égal à :
a) $\overrightarrow{HF}$ b) $\overrightarrow{HL}$ c) $\overrightarrow{BL}$

5 $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{EA}$ est égal à :
a) $\vec{0}$ b) $\overrightarrow{IL}$ c) $\overrightarrow{IC}$

6 Les droites (IJ) et (AF) sont :
a) coplanaires.
b) non coplanaires.
c) sécantes.

7 Les droites (DB) et (EF) sont :
a) coplanaires.
b) non coplanaires.
c) sécantes.

8 Les droites (IC) et (AB) sont :
a) coplanaires.
b) non coplanaires.
c) parallèles.

9 Les plans (DCG) et (EAF) sont :
a) strictement parallèles.
b) sécants.
c) confondus.

10 Les plans (IJA) et (HDC) sont :
a) strictement parallèles.
b) sécants.
c) confondus.

11 Les plans (IJE) et (CKL) sont :
a) strictement parallèles.
b) sécants.
c) confondus.

12 La droite (IJ) est parallèle :
a) au plan (ABF).
b) au plan (BCG).
c) au plan (DHF).

VRAI FAUX — Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

Dans toutes les affirmations, on considère la figure plus haut.

1 $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{LK}$ sont coplanaires.

2 $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont coplanaires.

3 Les droites (AB) et (HD) ont même vecteur directeur.

4 Les droites (BE) et (HC) ont même vecteur directeur.

5 $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur directeur de (DE).

6 $\overrightarrow{HJ}$ est un vecteur directeur de (AB).

7 Les plans (ABC) et (IEF) ont mêmes vecteurs directeurs.

8 Les plans (ADG) et (ACD) ont mêmes vecteurs directeurs.

9 $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur directeur du plan (ABF).

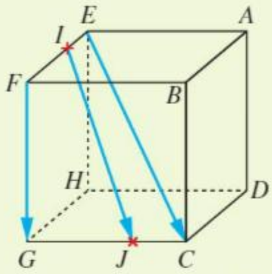
10 $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (CDG).

11 $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{DG})$ est une base du plan (CDG).

Exercice 2:

45 min

ABCDEFGH est un cube dessiné ci-dessous.



Les points I et J vérifient : $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$.

On veut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont coplanaires.

1. **Méthode vectorielle**

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$. Conclure.

2. **Méthode analytique**

Le plan est rapporté au repère $(G\,;\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GF})$.

a. Donner, sans justifier, les coordonnées des points G, C, H, F, E, I et J.

b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$.

c. Montrer que ces vecteurs sont coplanaires.

Exercice 3:

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

1 Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 3t \end{cases}, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Un vecteur directeur de cette droite a pour coordonnées :

ⓐ $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

VRAI FAUX

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

1 Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 5t \\ z = 12 + 2t \end{cases}, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Affirmation : Le point $A(6\,;-9\,;16)$ appartient à Δ.

2 **Affirmation :** Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et passant par le point $C(-10\,;81\,;25)$ est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 81 - 3t \\ z = 25 + 5t \end{cases}, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

[redacted]

4 Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites de l'espace telles que :

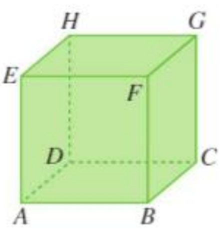
$$\Delta_1 : \begin{cases} x = -55t + 32 \\ y = 5t \\ z = -11t + 356 \end{cases}, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

$$\text{et } \Delta_2 : \begin{cases} x = u + 1 \\ y = -11u \\ z = 2\,020 \end{cases}, \text{ où } u \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Affirmation : Δ_1 et Δ_2 sont sécantes en un point.

5 On considère le cube *ABCDEFGH* ci-contre.

On se place dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}\,; \overrightarrow{AD}\,; \overrightarrow{AE})$.



Affirmation : Une représentation paramétrique de la droite (FD) est :

$$\begin{cases} x = -20t \\ y = 20t + 1 \\ z = -20t \end{cases}, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Exercice 4 :

1 On considère les droites d_1, d_2 et d_3 dont une représentation paramétrique est donnée ci-dessous. Pour chacune de ces droites, déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur.

1. $d_1 : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 22 - t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 22t \end{cases}$
2. $d_2 : \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -11 - t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = -44 + 5t \end{cases}$
3. $d_3 : \begin{cases} x = -t \\ y = -t, t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$
4. $d_4 : \begin{cases} x = 5t - 1 \\ y = -2 + 4t, t \in \mathbb{R}. \\ z = -t + 3 \end{cases}$

4 Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$, donnés ci-dessous.
Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

1. $A(-2;4;1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $A(5;0;-4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
3. $A(-7;8;2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
4. $A(16;4;0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5 :

7 **Calculer**
On considère la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 5 - t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Les points suivants appartiennent-ils à $\mathcal{D}$? Justifier.

1. $C(0;-1;4)$
2. $D(7;4;3)$
3. $E(-5;8;-1)$
4. $F\left(\frac{11}{2};\frac{9}{2};\frac{5}{2}\right)$

8 On considère une droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\Delta : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 7 - t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = -11 - t \end{cases}$$

1. Justifier que les points $A(-5;11;-7)$ et $B(9;-3;-21)$ appartiennent à Δ.
2. Les points A et B sont-ils alignés avec le point $C(-4;4;6)$?
3. Que peut-on en déduire sur la position relative du point C et de la droite Δ ?
4. Proposer une autre méthode pour justifier la réponse donnée à la question 3.

10 **Chercher, communiquer**
On considère les droites d_1 et d_2, dont on donne pour chacune une représentation paramétrique.

$$d_1 : \begin{cases} x = -6t + 4 \\ y = -8t - 1 , t \in \mathbb{R} ; \\ z = 6t - 22 \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = 3t' + 1 \\ y = 4t' \quad , t' \in \mathbb{R}. \\ z = -3t' + 3 \end{cases}$$

1. Déterminer un vecteur directeur de chacune de ces deux droites.
2. Les droites d_1 et d_2 sont-elles :
a. parallèles ?
b. coplanaires ?
c. confondues ?

CORRECTION

Exercice 1 :

QCM

1 b — 2 a
3 c — 4 b
5 c — 6 a
7 b — 8 b
9 a — 10 b
11 a — 12 a

VRAI FAUX

1 **Vrai.** $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BK}$
$\overrightarrow{LK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
Donc les vecteurs sont coplanaires.

2 **Vrai.** $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG}$
Donc les vecteurs sont coplanaires.

3 **Faux.** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HD}$ ne sont pas colinéaires (car directions différentes) donc les droites n'ont pas le même vecteur directeur.

4 **Vrai.** $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{HC}$ donc $\overrightarrow{BE}$ peut être un vecteur directeur de ces deux droites.

5 **Faux.** Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{DE}$ ne sont pas colinéaires (car directions différentes) donc $\overrightarrow{IJ}$ ne peut pas être un vecteur directeur de (DE).

6 **Vrai.** $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
Donc $\overrightarrow{HJ}$ est un vecteur directeur de (AB).

7 **Faux.** $\overrightarrow{IE}$ n'est pas directeur de (ABC).

8 **Faux.** $\overrightarrow{DG}$ n'est pas directeur de (ADC).

9 **Vrai.** $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$.

10 **Vrai.** Les 4 points appartiennent au plan.

11 **Faux.** Les deux vecteurs sont colinéaires.

Exercice 2 :

69 **1.** $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$

$$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{FG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB}) + \overrightarrow{FG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FG}$$

$$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{FG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{FG}) + \overrightarrow{FG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$$

Il existe deux nombres réels x et y tels que $\overrightarrow{IJ} = x\overrightarrow{EC} + y\overrightarrow{FG}$, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont donc coplanaires.

2. a. $G(0;0;0)$, $C(1;0;0)$, $H(0;1;0)$, $F(0;0;1)$ et $E(0;1;1)$, $I\left(0;\frac{2}{3};1\right)$, $J\left(\frac{2}{3};0;0\right)$.

b. $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

c. Pour montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont coplanaires, il suffit de trouver deux nombres x et y tels que $\overrightarrow{IJ} = x\overrightarrow{EC} + y\overrightarrow{FG}$.

Donc $\overrightarrow{IJ} = x\overrightarrow{EC} + y\overrightarrow{FG} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2}{3} = x \times 1 + y \times 0\\ -\frac{2}{3} = x \times (-1) + y \times 0\\ -1 = x \times (-1) + y \times (-1)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2}{3} = x\\ -\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times (-1)\\ -1 = \frac{2}{3} \times (-1) - y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}\\ y = \frac{1}{3}\end{cases}.$$

Le système admet un couple solution $(x\,;y) = \left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont donc coplanaires.

Exercice 3 :

QCM

1 (c)

VRAI FAUX

1 **Vrai.** $t=2$

2 **Faux.** $x=-10$

4 **Faux.** Résoudre le système en u et t

5 **Vrai.** $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc un vecteur directeur de la droite a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-20\\20\\20\end{pmatrix}$, et $D(0\,;1\,;0)$.

Exercice 4 :

1 **1.** $A(4\,;22\,;0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\22\end{pmatrix}$.

2. $A(3\,;-11\,;-44)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-1\\5\end{pmatrix}$.

3. $A(0\,;0\,;0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

4. $A(-1\,;-2\,;3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}$.

4 **1.** $\mathscr{D}:\begin{cases}x=-2+3t\\y=4+2t\\z=1+t\end{cases}$, où t décrit l'ensemble des réels.

2. $\mathscr{D}:\begin{cases}x=5-2t\\y=4t\\z=-4+3t\end{cases}$, où t décrit l'ensemble des réels.

3. $\mathscr{D}:\begin{cases}x=-7\\y=8+2t\\z=2-3t\end{cases}$, où t décrit l'ensemble des réels.

4. $\mathscr{D}:\begin{cases}x=16+3t\\y=4-3t\\z=0\end{cases}$, où t décrit l'ensemble des réels.

Exercice 5 :

7 **1.** Le point C appartient à la droite $\mathscr{D}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}0=4+3t\\-1=5-t\\4=2+t\end{cases}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}t=-\dfrac{4}{3}\\t=6\\t=2\end{cases}$.

La dernière proposition est fausse donc, par équivalences, la première est fausse également. Donc, le point C n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

2. Le point D appartient à la droite $\mathscr{D}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}7=4+3t\\4=5-t\\3=2+t\end{cases}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}t=1\\t=1.\\t=1\end{cases}$

Il existe une valeur unique de t solution du système, donc par équivalences, le point D appartient à la droite $\mathscr{D}$.

3. Le point E appartient à la droite $\mathscr{D}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}-5=4+3t\\8=5-t\\-1=2+t\end{cases}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}t=-3\\t=-3.\\t=-3\end{cases}$

Il existe une valeur unique de t solution du système, donc par équivalences, le point E appartient à la droite $\mathscr{D}$.

4. Le point F appartient à la droite $\mathscr{D}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}\dfrac{11}{2}=4+3t\\\dfrac{9}{2}=5-t\\\dfrac{5}{2}=2+t\end{cases}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}3t=\dfrac{3}{2}\\t=\dfrac{1}{2}\\t=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}t=\dfrac{1}{2}\\t=\dfrac{1}{2}.\\t=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Il existe une valeur unique de t solution du système, donc par équivalences, le point F appartient à la droite $\mathscr{D}$.

8 **1.** Le point A appartient à la droite Δ

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases} -5=-1+t \\ 11=7-t \\ -7=-11-t \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases} t=-4 \\ t=-4 \\ t=-4 \end{cases}$.

Il existe une valeur unique de t solution du système, donc le point A appartient à la droite Δ.
Le point B appartient à la droite Δ

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases} 9=-1+t \\ -3=7-t \\ -21=-11-t \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases} t=10 \\ t=10 \\ t=10 \end{cases}$.

Il existe une valeur unique de t solution du système, donc le point B appartient à la droite Δ.
2. Les points A et B sont alignés avec le point C
$\Leftrightarrow$ le point C appartient à la droite Δ

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases} -4=-1+t \\ 4=7-t \\ 6=-11-t \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases} t=-3 \\ t=3 \\ t=-5 \end{cases}$.

La dernière proposition est fausse donc, par équivalences, la première est fausse également. Donc, les points A et B ne sont pas alignés avec le point C.
3. Le point C n'appartient pas à la droite Δ.
4. On prouve que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

10 **1.** d_1 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$.

d_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. a. On remarque que $\overrightarrow{u_1}=-2\overrightarrow{u_2}$, alors les droites d_1 et d_2 sont parallèles.
b. Deux droites parallèles sont coplanaires, d_1 et d_2 sont donc coplanaires.
c. Le point $A(4\,;-1\,;-22)$ appartient à d_1.
Le point A appartient à la droite d_2

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t' tel que $\begin{cases} 4=3t'+1 \\ -1=4t' \\ -22=-3t'+3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t' tel que $\begin{cases} t'=1 \\ t'=-\dfrac{1}{4} \\ t'=\dfrac{25}{3} \end{cases}$.

La dernière proposition est fausse donc, par équivalences, la première est fausse également. Donc, le point A n'appartient pas à la droite d_2. Les droites d_1 et d_2 sont strictement parallèles.