LES FONCTIONS AFFINES

I. Caractérisation d'une fonction affine :

1) Quelques définitions :

Soit m et p deux réels.
La fonction f telle que $f(x) = mx + p$ est appelée fonction affine.
Son ensemble de définition est $D_f =]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$

m est appelé coefficient directeur. p est appelé ordonnée à l'origine.

Cas particuliers :

Si m = 0 alors $f(x) = p$ est une fonction constante.
Si p = 0 alors $f(x) = m\,x$ est une fonction linéaire.

Exemple : Compléter le tableau suivant :

Fonction	Affine (oui–non)	Linéaire (oui–non)	Constante (oui–non)	Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine
$f(x) = -5x + 2$	*oui*	*non*	*non*	*– 5*	*2*
$g(x) = 3$	*oui*	*non*	*oui*	*0*	*3*
$h(x) = 4x$	*oui*	*oui*	*non*	*4*	*0*
$k(x) = 7 - 2x$	*oui*	*non*	*non*	*–2*	*7*
$r(x) = \frac{7}{x} - 2$	*non*	*non*	*non*		
$s(x) = \frac{1}{2}x - 6$	*oui*	*non*	*non*	$\frac{1}{2}$	*– 6*

2) Propriété caractéristique d'une fonction affine :

***f* est une fonction définie sur IR.**

***f* est une fonction affine si et seulement si, pour tous réels distincts a et b, le rapport $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant.**

Démonstration (à na pas connaitre par cœur):

Implication : si f affine alors $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant.

Posons $f(x) = mx + p$. Alors $f(b) = m\,b + p$ et $f(a) = m\,a + p$.
Donc $f(b) - f(a) = mb + p - ma - p = mb - ma = m (b - a)$
Et $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{m(b - a)}{b - a} = m$ donc $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est bien une constante.

Réciproque : si le quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant alors f est une fonction affine.

Si $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant, avec $b \neq a$, cela signifie que

Pour tout réel $x \neq a$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est constant.

On peut donc poser $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c$ avec c un réel.

On a alors $f(x) - f(a) = c (x - a)$ donc $f(x) = c\,x \underbrace{- c\,a + f(a)}_{\text{constante}} = c\,x + d$.

On retrouve donc l'écriture d'une fonction affine.

Si $x = a$, on pose $\frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = c$ et on reproduit le même raisonnement.

3) Conséquence :

Si on connait les images de a et b deux réels distincts par une fonction affine f alors

$f(x) = m\,x + p$ avec $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et $p = f(a) - m\,a$ *ou* $p = f(b) - m\,b$.

Exemple : Soit f une fonction affine vérifiant $f(5) = 1$ et $f(-2) = 3$. Retrouver l'expression de f.

$$f(x) = m\,x + p \quad \text{avec} \quad m = \frac{f(5) - f(-2)}{5+2} = \frac{1-3}{7} = -\frac{2}{7}$$

$$p = f(5) + \frac{2}{7} \times 5 = 1 + \frac{10}{7} = \frac{7}{7} + \frac{10}{7} = \frac{17}{7} \quad \text{donc} \quad f(x) = -\frac{2}{7}x + \frac{17}{7}$$

II. Représentation graphique d'une fonction affine :

Une fonction affine f définie sur IR par $f(x) = m\,x + p$ est représentée par une droite d'équation $y = m\,x + p$, qui coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ; p).

Cas particuliers :

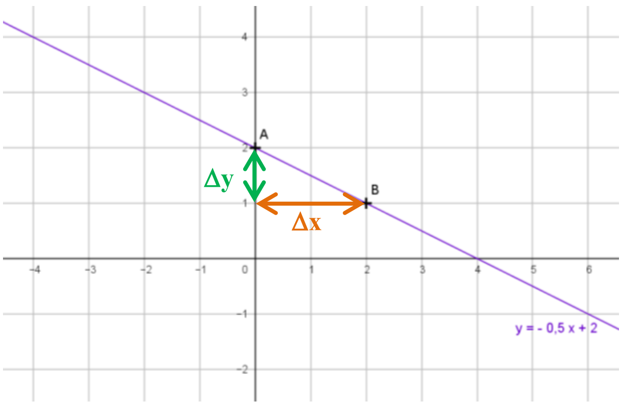
si f est linéaire, p = 0 et la droite représentant f passe par l'origine.

si f est constante, m = 0 et la droite représentant f est parallèle à l'axe des abscisses.

Pour tracer la droite représentant une fonction affine f, il suffit de placer deux points A (a ; f(a)) et B (b ; f(b)).

Exemple **:** Représenter la fonction f définie par : $f(x) = -0{,}5\,x + 2$.

- *On choisit deux abscisses, par exemple 0 et 2.*
- *On calcule $f(0)$ et $f(2)$. $f(0) = -0{,}5 \times 0 + 2 = 2$ et $f(2) = -0{,}5 \times 2 + 2 = -1 + 2 = 1$*
- *On place les deux points A (0 ; 2) et B (2 ; 1) et on trace la droite (AB).*



Remarque : $m = -0{,}5 = \dfrac{-1}{2} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ et $p = f(0)$.

Cette remarque permet de lire dans de très nombreux cas l'équation de la droite dessinée.

Exemple : Soit A (5 ; −2) et B (−1 ; 3) deux points du plan. Déterminer l'équation de la droite (AB) .

La droite (AB) a une équation de la forme $y = m\,x + p$.

$\boldsymbol{m} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{-2-3}{5-(-1)} = \dfrac{-5}{6}$ *donc on a* $y = \dfrac{-5}{6}\,x + p$

$A \in (AB)$ *donc* $y_A = \dfrac{-5}{6}\,x_A + p$ *donc* $-2 = \dfrac{-5}{6} \times 5 + \text{p}$ *d'où* $p = -2 + \dfrac{25}{6} = \dfrac{13}{6}$

La droite (AB) a pour équation $y = \dfrac{-5}{6}x + \dfrac{13}{6}$

III. Etude d'une fonction affine :

1) Variations d'une fonction affine f définie sur IR par $f(x) = m\,x + p$:

Si m > 0 la fonction affine f est strictement croissante sur IR.
Si m < 0 la fonction affine f est strictement décroissante sur IR.
Si m = 0 la fonction affine f est constante sur IR.

Tableau de variations si m > 0

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
variations de f	$\nearrow$

Tableau de variations si m < 0

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
variations de f	$\searrow$

Démonstration : Soit a et b deux réels tels que a < b.
Si m > 0 alors m a < m b donc m a + p < m b + p donc f(a) < f(b)
l'ordre n'est pas perturbé,
la fonction est croissante.

Si m < 0 alors m a > m b donc m a + p > m b + p donc f(a) > f(b)
l'ordre est perturbé,
la fonction est décroissante.

Exemple : Compléter les tableaux de variations de f et g définies sur IR par $f(x) = 3 - 2x$ et $g(x) = 5x + 4$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
variations de f	$\searrow$

Pour f m = – 2 donc m < 0
f est décroissante sur IR

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
variations de g	$\nearrow$

Pour g m = 5 donc m > 0
g est croissante sur IR

2) Parité d'une fonction affine f définie sur IR par $f(x) = m\,x + p$:

Parmi les fonctions affines, seules les fonctions linéaires sont impaires
et seules les fonctions constantes sont paires.

Démonstration :
Une fonction linéaire est impaire. En effet si $f(x) = \text{m}x$ alors $f(-x) = -\text{m}x = -f(x)$
Une fonction constante est paire. En effet si $f(x) = \text{p}$ alors $f(-x) = \text{p} = f(x)$
Réciproquement:

- si f est impaire alors $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ pour tout les réels $\boldsymbol{x}$
  donc $-\text{m}x + \text{p} = -\text{m}x - \text{p}$ donc 2p = 0 donc p = 0. La fonction f est donc linéaire.
- si f est paire alors $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ pour tout les réels $\boldsymbol{x}$
  donc $-\text{m}x + \text{p} = \text{m}x + \text{p}$ donc $-\text{m}x = \text{m}x$ donc $2\text{m}x = 0$ pour tout $\boldsymbol{x}$ donc m = 0.
  La fonction f est donc constante.

3) Signe d'une fonction affine f définie sur IR par $f(x) = m\,x + p$:

Si $m \neq 0$ $f(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow m\,\boldsymbol{x} + p = 0 \Leftrightarrow m\,\boldsymbol{x} = -p \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = -\dfrac{p}{m}$ La fonction f s'annule pour $\boldsymbol{x} = -\dfrac{p}{m}$

Si $m \neq 0$ $f(\boldsymbol{x}) > 0 \Leftrightarrow m\,\boldsymbol{x} + p > 0 \Leftrightarrow m\,\boldsymbol{x} > -p$

si $m > 0$ $m\,\boldsymbol{x} > -p \Leftrightarrow \boldsymbol{x} > -\dfrac{p}{m}$ f sera positive sur $\left]-\dfrac{p}{m} ; +\infty\right[$

si $m < 0$ $m\,\boldsymbol{x} > -p \Leftrightarrow \boldsymbol{x} < -\dfrac{p}{m}$ f sera positive sur $\left]-\infty ; -\dfrac{p}{m}\right[$

Si $m \neq 0$ $f(\boldsymbol{x}) < 0 \Leftrightarrow m\,\boldsymbol{x} + p < 0 \Leftrightarrow m\,\boldsymbol{x} < -p$

si $m > 0$ $m\,\boldsymbol{x} < -p \Leftrightarrow \boldsymbol{x} < -\dfrac{p}{m}$ f sera négative sur $\left]-\infty ; -\dfrac{p}{m}\right[$

si $m < 0$ $m\,\boldsymbol{x} < -p \Leftrightarrow \boldsymbol{x} > -\dfrac{p}{m}$ f sera négative sur $\left]-\dfrac{p}{m} ; +\infty\right[$

Si $m = 0$ f est constante, $f(\boldsymbol{x}) = p$ donc f est du même signe que p.

Tableau de signes si $m > 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{p}{m}$	$+\infty$
signe de $f(x) = m\,x + p$	$-$	0	$+$

Tableau de signes si $m < 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{p}{m}$	$+\infty$
signe de $f(x) = m\,x + p$	$+$	0	$-$

Remarque : à droite du 0, on retrouve toujours le signe de m.

Exemple : Compléter le tableau de signes de la fonction affine f définie sur IR par $f(x) = -3x + 8$

x	$-\infty$	$\dfrac{8}{3}$	$+\infty$
signe de $f(x) = -3x + 8$	$+$	0	$-$ signe de m

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 8 = 0 \Leftrightarrow -3x = -8 \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{3}$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow -3x + 8 > 0 \Leftrightarrow -3x > -8 \Leftrightarrow x < \dfrac{8}{3}$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow -3x + 8 < 0 \Leftrightarrow -3x < -8 \Leftrightarrow x > \dfrac{8}{3}$

Ou $m = -3$ et $p = 8$ $-\dfrac{p}{m} = \dfrac{-8}{-3} = \dfrac{8}{3}$