

LES FONCTIONS AFFINES

I. Caractérisation d'une fonction affine :

1) Quelques définitions :

Soit m et p deux réels.

La fonction f telle que $f(x) = mx + p$ est appelée **fonction affine**.

Son ensemble de définition est $D_f =]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$

m est appelé **coefficent directeur**. p est appelé **ordonnée à l'origine**.

Cas particuliers :

Si $m = 0$ alors $f(x) = p$ est une fonction **constante**.

Si $p = 0$ alors $f(x) = mx$ est une fonction **linéaire**.

Exemple : Compléter le tableau suivant :

Fonction	Affine (oui–non)	Linéaire (oui–non)	Constante (oui–non)	Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine
$f(x) = -5x + 2$	oui	non	non	-5	2
$g(x) = 3$	oui	non	oui	0	3
$h(x) = 4x$	oui	oui	non	4	0
$k(x) = 7 - 2x$	oui	non	non	-2	7
$r(x) = \frac{7}{x} - 2$	non	non	non		
$s(x) = \frac{1}{2}x - 6$	oui	non	non	$\frac{1}{2}$	-6

2) Propriété caractéristique d'une fonction affine :

f est une fonction définie sur \mathbb{R} .

f est une fonction affine si et seulement si, pour tous réels distincts a et b , le rapport $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant.

Démonstration (à na pas connaitre par cœur) :

Implication : si f affine alors $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant.

Posons $f(x) = mx + p$. Alors $f(b) = mb + p$ et $f(a) = ma + p$.

Donc $f(b) - f(a) = mb + p - ma - p = mb - ma = m(b - a)$

Et $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{m(b - a)}{b - a} = m$ donc $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est bien une constante.

Réciproque : si le quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant alors f est une fonction affine.

Si $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant, avec $b \neq a$, cela signifie que

Pour tout réel $x \neq a$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est constant.

On peut donc poser $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c$ avec c un réel.

On a alors $f(x) - f(a) = c(x - a)$ donc $f(x) = cx - ca + f(a)$ = $c x$ $\underbrace{- ca + f(a)}$ constante

On retrouve donc l'écriture d'une fonction affine.

Si $x = a$, on pose $\frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = c$ et on reproduit le même raisonnement.

3) Conséquence :

Si on connaît les images de a et b deux réels distincts par une fonction affine f alors

$$f(x) = mx + p \text{ avec } m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{et} \quad p = f(a) - m a \quad \text{ou} \quad p = f(b) - m b.$$

Exemple : Soit f une fonction affine vérifiant $f(5) = 1$ et $f(-2) = 3$. Retrouver l'expression de f .

$$f(x) = mx + p \text{ avec } m = \frac{f(5) - f(-2)}{5 + 2} = \frac{1 - 3}{7} = -\frac{2}{7}$$

$$p = f(5) + \frac{2}{7} \times 5 = 1 + \frac{10}{7} = \frac{17}{7} \quad \text{donc } f(x) = -\frac{2}{7}x + \frac{17}{7}$$

II. Représentation graphique d'une fonction affine :

Une fonction affine f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = mx + p$ est représentée par une droite d'équation $y = mx + p$, qui coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; p)$.

Cas particuliers :

si f est linéaire, $p = 0$ et la droite représentant f passe par l'origine.

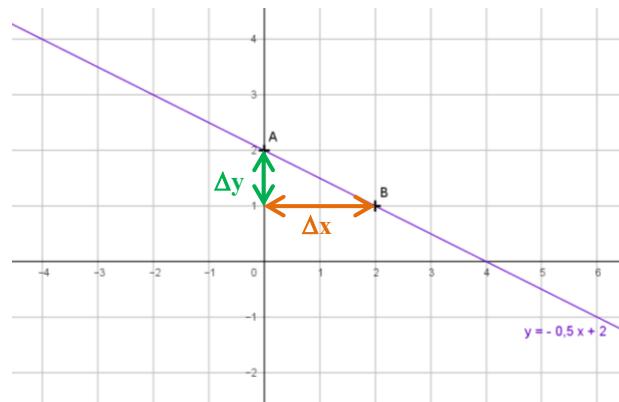
si f est constante, $m = 0$ et la droite représentant f est parallèle à l'axe des abscisses.

Pour tracer la droite représentant une fonction affine f , il suffit de placer deux points

$A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.

Exemple : Représenter la fonction f définie par : $f(x) = -0,5x + 2$.

- On choisit deux abscisses, par exemple 0 et 2.
- On calcule $f(0)$ et $f(2)$. $f(0) = -0,5 \times 0 + 2 = 2$ et $f(2) = -0,5 \times 2 + 2 = -1 + 2 = 1$
- On place les deux points $A(0; 2)$ et $B(2; 1)$ et on trace la droite (AB) .



Remarque : $m = -0,5 = \frac{-1}{2} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ et $p = f(0)$.

Cette remarque permet de lire dans de très nombreux cas l'équation de la droite dessinée.

Exemple : Soit A (5 ; -2) et B (-1 ; 3) deux points du plan. Déterminer l'équation de la droite (AB).

La droite (AB) a une équation de la forme $y = mx + p$.

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-2 - 3}{5 - (-1)} = \frac{-5}{6} \text{ donc on a } y = \frac{-5}{6}x + p$$

$$A \in (AB) \text{ donc } y_A = \frac{-5}{6}x_A + p \text{ donc } -2 = \frac{-5}{6} \times 5 + p \text{ d'où } p = -2 + \frac{25}{6} = \frac{13}{6}$$

$$\text{La droite (AB) a pour équation } y = \frac{-5}{6}x + \frac{13}{6}$$

III. Etude d'une fonction affine :

1) Variations d'une fonction affine f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = mx + p$:

Si $m > 0$ la fonction affine f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Si $m < 0$ la fonction affine f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

Si $m = 0$ la fonction affine f est constante sur \mathbb{R} .

Tableau de variations si $m > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f		↗

Tableau de variations si $m < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f	↘	

Démonstration : Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Si $m > 0$ alors $ma < mb$ donc $ma + p < mb + p$ donc $f(a) < f(b)$

l'ordre n'est pas perturbé,
la fonction est croissante.

Si $m < 0$ alors $ma > mb$ donc $ma + p > mb + p$ donc $f(a) > f(b)$

l'ordre est perturbé,
la fonction est décroissante.

Exemple : Compléter les tableaux de variations de f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = 3 - 2x$ et $g(x) = 5x + 4$

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f	↘	

*Pour f $m = -2$ donc $m < 0$
 f est décroissante sur \mathbb{R}*

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de g		↗

*Pour g $m = 5$ donc $m > 0$
 g est croissante sur \mathbb{R}*

2) Parité d'une fonction affine f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = mx + p$:

**Parmi les fonctions affines, seules les fonctions linéaires sont impaires
et seules les fonctions constantes sont paires.**

Démonstration :

Une fonction linéaire est impaire. En effet si $f(x) = mx$ alors $f(-x) = -mx = -f(x)$

Une fonction constante est paire. En effet si $f(x) = p$ alors $f(-x) = p = f(x)$

Réciproquement:

- si f est impaire alors $f(-x) = -f(x)$ pour tout les réels x
donc $-mx + p = -mx - p$ donc $2p = 0$ donc $p = 0$. La fonction f est donc linéaire.
- si f est paire alors $f(-x) = f(x)$ pour tout les réels x
donc $-mx + p = mx + p$ donc $-mx = mx$ donc $2mx = 0$ pour tout x donc $m = 0$.
La fonction f est donc constante.

3) Signe d'une fonction affine f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = mx + p$:

Si $m \neq 0$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow mx + p = 0 \Leftrightarrow mx = -p \Leftrightarrow x = -\frac{p}{m}$ La fonction f s'annule pour $x = -\frac{p}{m}$

Si $m \neq 0$ $f(x) > 0 \Leftrightarrow mx + p > 0 \Leftrightarrow mx > -p$

si $m > 0$ $mx > -p \Leftrightarrow x > -\frac{p}{m}$ f sera positive sur $]-\frac{p}{m}; +\infty[$

si $m < 0$ $mx > -p \Leftrightarrow x < -\frac{p}{m}$ f sera positive sur $]-\infty; -\frac{p}{m}[$

Si $m \neq 0$ $f(x) < 0 \Leftrightarrow mx + p < 0 \Leftrightarrow mx < -p$

si $m > 0$ $mx < -p \Leftrightarrow x < -\frac{p}{m}$ f sera négative sur $]-\infty; -\frac{p}{m}[$

si $m < 0$ $mx < -p \Leftrightarrow x > -\frac{p}{m}$ f sera négative sur $]-\frac{p}{m}; +\infty[$

Si $m = 0$ f est constante, $f(x) = p$ donc f est du même signe que p .

Tableau de signes si $m > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
signe de $f(x) = mx + p$	-	0	+

Tableau de signes si $m < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
signe de $f(x) = mx + p$	+	0	-

Remarque : à droite du 0, on retrouve toujours le signe de m .

Exemple : Compléter le tableau de signes de la fonction affine f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -3x + 8$

x	$-\infty$	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
signe de $f(x) = -3x + 8$	+	0	signe de m

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 8 = 0 \Leftrightarrow -3x = -8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow -3x + 8 > 0 \Leftrightarrow -3x > -8 \Leftrightarrow x < \frac{8}{3}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow -3x + 8 < 0 \Leftrightarrow -3x < -8 \Leftrightarrow x > \frac{8}{3}$$

Ou $m = -3$ et $p = 8$ $-\frac{p}{m} = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}$

IV. Applications du signe d'une fonction affine aux résolutions d'inéquations :

1) Signe d'un produit :

Exemple : Résoudre l'inéquation $(5x - 2)(-3x + 4) < 0$

Il faut étudier le signe de chacun des facteurs du produit.

$$5x - 2 = 0 \Leftrightarrow 5x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$$

$$5x - 2 > 0 \Leftrightarrow 5x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{5}$$

ou $m=5$ et $p=-2$ $-\frac{p}{m} = \frac{2}{5}$

$$-3x + 4 = 0 \Leftrightarrow -3x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$-3x + 4 > 0 \Leftrightarrow -3x > -4 \Leftrightarrow x < \frac{4}{3}$$

ou $m=-3$ et $p=4$ $-\frac{p}{m} = \frac{4}{3}$

Il faut faire un tableau regroupant les signes des deux facteurs et le signe de leur produit.

	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
signe de $5x - 2$	-	0	+	<i>signe de m</i>
signe de $-3x + 4$	+	+	0	<i>signe de m</i>
signe de $(5x - 2)(-3x + 4)$	-	0	0	-

Il faut répondre à la question posée en donnant un ensemble de solutions.

On veut que le produit soit *strictement négatif*. C'est le cas sur $] -\infty; \frac{2}{5} [$ et sur $] \frac{4}{3}; +\infty [$

Donc on écrit $S =] -\infty; \frac{2}{5} [\cup] \frac{4}{3}; +\infty [$

2) Signe d'un quotient :

Exemple : Résoudre l'inéquation $\frac{4-2x}{7x+3} \geq 0$

Il faut étudier le signe de chacun du numérateur et du dénominateur.

$$4 - 2x = 0 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} = 2$$

$$4 - 2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -4 \Leftrightarrow x < 2$$

ou $m=-2$ et $p=4$ $-\frac{p}{m} = \frac{4}{2} = 2$

$$7x + 3 = 0 \Leftrightarrow 7x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{7}$$

ATTENTION $-\frac{3}{7}$ est une valeur interdite
(un dénominateur ne peut pas être nul)

$$7x + 3 > 0 \Leftrightarrow 7x > -3 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{7}$$

ou $m=7$ et $p=3$ $-\frac{p}{m} = -\frac{3}{7}$

Il faut faire un tableau regroupant les signes des numérateurs et dénominateurs et le signe du quotient.

	$-\infty$	$-\frac{3}{7}$	2	$+\infty$
signe de $4 - 2x$	+		+	<i>signe de m</i>
signe de $7x + 3$	-	0	+	<i>signe de m</i>
signe de $\frac{4-2x}{7x+3}$	-		+	-

V.I

Il faut répondre à la question posée en donnant un ensemble de solutions.

On veut que le produit soit *positif ou nul*. C'est le cas sur $] -\frac{3}{7}; 2]$. Donc on écrit $S =] -\frac{3}{7}; 2]$.

V. Utilisation de la calculette :

- Pour rentrer une fonction dans la calculette, on va dans le menu $f(x)$ et on rentre l'expression de la fonction dans Y1 par exemple.
- On peut afficher la droite représentative en appuyant sur graphe.
- On peut afficher un tableau de valeurs en appuyant sur Table (2^{nde} graphe)
- On peut résoudre des équations en choisissant le menu résol puis 2: PlySmlt2 puis 1 : Racines d'un polynôme on choisit DEGRE 1 REEL AUTO NORMAL FLOTT puis SUIV. en appuyant sur la touche graphe on rentre l'équation à résoudre puis RESOL en appuyant sur la touche graphe La solution s'affiche.

EXERCICES A FAIRE

Les parcours vert, orange, et rouge sont bien !

Parcours vert :

- n° 33 page 106 Calcul littéral
- n° 39 page 107 Tableau de valeurs
- n° 42 page 107 Retrouver une fonction affine avec 2 images
- n° 50 page 108 Lecture graphique et résolution équation et inéquation
- n° 56 page 109 Résolution graphique équation et inéquation
- n° 63 page 110 Variations
- n° 88 page 112 Python

Parcours orange :

- n° 41 page 107 Démonstration, contraposée, réciproque
- n° 58 page 109 Raisonnement à partir d'images
- n° 66 page 110 Raisonnement à partir d'un tableau de signes
- n° 68 page 110 Variation d'une somme de deux affines
- n° 70 page 110 Algorithmique
- n° 74 page 111 Résolution d'inéquations avec produits
- n° 87 page 112 Problème complet avec des coûts.

Parcours rouge :

- n° 45 page 107 Raisonnement à partir d'un problème
- n° 53 page 108 Raisonnement à partir de la calculette
- n° 61 page 109 Comparaison d'images à partir des variations
- n° 80 page 111 Famille de fonctions f_n
- n° 82 page 111 Variations et composition de deux fonctions
- n° 86 page 112 Problème complet (aires)
- n° 91 page 114 Problème complet (aires)

Voir aussi les exercices transversaux .

- n° 1 page 322 Avec une fonction affine et un paramètre.
- n° 3 page 322 Problème complet.
- n° 7 page 324 Avec des statistiques.
- n° 9 page 325 Avec des pourcentages et des taux réciproques.
- n° 18 page 328 Avec des pourcentages et des taux réciproques.