TD Géométrie dans l'espace n°2 : Equations Droites et plans

<u>Exercice 1</u> :

Dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) on considère les points A(-2 ; 3 ;1) B(5 ; 2 ;-2)

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Les points M(-9 ; 4 ; 4) et N(12 ; 1 ; 1) appartiennent-ils à (AB) ?

<u>Exercice 2</u> :

Démontrer que les droites D et D' sont confondues.

D : $\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -3 - t \\ z = -4t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et D ' : $\begin{cases} x = 9 + 15s \\ y = -5 - 3s \\ z = -8 - 12s \end{cases}$ $s \in \mathbb{R}$

<u>Exercice 3</u> :

Démontrer que les droites D et D' sont strictement parallèles

D : $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4t \\ z = 1 + 12t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et D ' : $\begin{cases} x = -1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 5 + 3s \end{cases}$ $s \in \mathbb{R}$

<u>Exercice 4</u> :

Démontrer que les droites D et D' sont non coplanaires

D : $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et D ' : $\begin{cases} x = -1 + s \\ y = 2 - 2s \\ z = 5 + 3s \end{cases}$ $s \in \mathbb{R}$

<u>Exercice 5</u> :

Démontrer que les droites D et D' sont sécantes

D : $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et D ' : $\begin{cases} x = s \\ y = 1 + s \\ z = -1 - 4s \end{cases}$ $s \in \mathbb{R}$

<u>Exercice 6</u> :

Dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) on considère les points A(-2 ; 3 ;1) B(5 ; 2 ;-2) C(0 ; 2 ; 1)

1. Déterminer l' équation paramétrique du plan (ABC)
2. Le point D(-1 ; 3 ; 7) appartient-il au plan (ABC) ?

CORRECTION

Exercice 1 :

Dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ on considère les points A(-2 ; 3 ;1) B(5 ; 2 ;-2)

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

   $\overrightarrow{AB}$ (7 ; – 1 ; – 3) est un vecteur directeur de la droite (AB).

   $\begin{cases} x = -2 + 7t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ est un système d'équations paramétriques de la droite (AB).

2. Les points M(-9 ; 4 ; 4) et N(12 ; 1 ; 1) appartiennent-ils à (AB) ?

   Si M $\in$ (AB) alors il existe un réel t tel que : $\begin{cases} -9 = -2 + 7t \\ 4 = 3 - t \\ 4 = 1 - 3t \end{cases}$

   $\begin{cases} -9 = -2 + 7t \\ 4 = 3 - t \\ 4 = 1 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 = 7t \\ 1 = -t \\ 3 = -3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = t \\ -1 = t \\ -1 = t \end{cases}$ Le système a une solution donc M $\in$ (AB).

   Si N $\in$ (AB) alors il existe un réel t tel que : $\begin{cases} 12 = -2 + 7t \\ 1 = 3 - t \\ 1 = 1 - 3t \end{cases}$

   $\begin{cases} 12 = -2 + 7t \\ 1 = 3 - t \\ 1 = 1 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14 = 7t \\ -2 = -t \\ 0 = -3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = t \\ 2 = t \\ 0 = t \end{cases}$

   Le système n'a pas de solution donc N $\notin$ (AB).

Exercice 2 :

Démontrer que les droites D et D’ sont confondues. D : $\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -3 - t \\ z = -4t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et D' : $\begin{cases} x = 9 + 15s \\ y = -5 - 3s \\ z = -8 - 12s \end{cases}$ $s \in \mathbb{R}$

Pour montrer que des droites sont confondues, on montre que leurs vecteurs directeurs sont colinéaires et qu'elles passent par le même point.

La droite D a pour vecteur directeur $\vec{u}$ (5 ; – 1 ; – 4) et elle passe par A (– 1 ; – 3 ; 0).

La droite D' a pour vecteur directeur $\vec{v}$ (15 ; – 3 ; – 12).

On voit que $\vec{v} = 3\,\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc D et D' sont parallèles.

Le point A appartient-il à D' ?

Si A $\in$ D' alors il existe un réel s tel que : $\begin{cases} -1 = 9 + 15s \\ -3 = -5 - 3s \\ 0 = -8 - 12s \end{cases}$

$\begin{cases} -1 = 9 + 15s \\ -3 = -5 - 3s \\ 0 = -8 - 12s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 = 15s \\ 2 = -3s \\ 8 = -12s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{2}{3} = s \\ -\dfrac{2}{3} = s \\ -\dfrac{2}{3} = s \end{cases}$

Le système a une solution donc A $\in$ D. Donc les droites D et D' sont confondues.

Exercice 3 :

Démontrer que les droites D et D’ sont strictement parallèles

$$D : \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4t \\ z = 1 + 12t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} x = -1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 5 + 3s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Pour montrer que des droites sont strictement parallèles, on montre que leurs vecteurs directeurs sont colinéaires et qu'il existe un point de D qui n'appartient pas à D'.

La droite D a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ (4 ; 4 ; 12) et elle passe par A (– 3 ; 0 ; 1).
La droite D' a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ (1 ; 1 ; 3).
On voit que $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{v}$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires donc D et D' sont parallèles.
Le point A appartient-il à D' ?

Si A $\in$ D' alors il existe un réel s tel que : $\begin{cases} -3 = -1 + s \\ 0 = 2 + s \\ 1 = 5 + 3s \end{cases}$

$$\begin{cases} -3 = -1 + s \\ 0 = 2 + s \\ 1 = 5 + 3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = s \\ -2 = s \\ -4 = 3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = s \\ -2 = s \\ -\frac{4}{3} = s \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution donc A $\notin$ D et les droites D et D' sont donc strictement parallèles

Exercice 4 :

Démontrer que les droites D et D’ sont non coplanaires.

$$D : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} x = -1 + s \\ y = 2 - 2s \\ z = 5 + 3s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Des droites coplanaires sont soit parallèles, soient sécantes.

La droite D a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ (1 ; 1 ; 3)
La droite D' a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ (1 ; – 2 ; 3).
On voit de façon évidente que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc D et D' ne sont pas parallèles.
Si les droites sont sécantes, les coordonnées du point d'intersection vérifient :

$$\begin{cases} x = -3 + t = -1 + s \\ y = t = 2 - 2s \\ z = 1 + 3t = 5 + 3s \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} -3 + t = -1 + s \\ t = 2 - 2s \\ 1 + 3t = 5 + 3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 + s \\ t = 2 - 2s \\ 3t = 4 + 3s \end{cases}$$

On choisit les deux premières équations :

$$\begin{cases} t = 2 + s \\ t = 2 - 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 + s \\ 2 + s = 2 - 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 + s \\ 3s = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ s = 0 \end{cases}$$

On vérifie si ces solutions conviennent, dans la troisième équation :
$3t = 6$ et $4 + 3s = 4$.
Le système n'a pas de solutions donc les droites D et D' ne sont pas sécantes.
Elles ne sont ni parallèles, ni sécantes, elles ne sont donc pas coplanaires.

Exercice 5 :

Démontrer que les droites D et D' sont sécantes

D : $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et D ' : $\begin{cases} x = s \\ y = 1 + s \\ z = -1 - 4s \end{cases}$ $s \in \mathbb{R}$

Si les droites sont sécantes, les coordonnées du point d'intersection vérifient :

$\begin{cases} x = -3 + t = s \\ y = 2 - t = 1 + s \\ z = 1 + t = -1 - 4s \end{cases}$ donc $\begin{cases} -3 + t = s \\ 2 - t = 1 + s \\ 1 + t = -1 - 4s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + t = s \\ 1 - t = s \\ 2 + t = -4s \end{cases}$

On choisit les deux premières équations :

$\begin{cases} s = -3 + t \\ s = 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = -3 + t \\ -3 + t = 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = -3 + t \\ 2t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = -1 \\ t = 2 \end{cases}$

On vérifie si ces solutions conviennent, dans la troisième équation :

$2 + t = 4$ et $-4s = 4$.

Le système a donc une solution donc les droites D et D' sont sécantes.

Les coordonnées du point d'intersection sont $(-1 ; 0 ; 3)$.

Exercice 6 :

Dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ on considère les points A(-2 ; 3 ;1) B(5 ; 2 ;-2) C(0 ; 2 ; 1)

1. Déterminer l' équation paramétrique du plan (ABC)

   $\overrightarrow{AB} (7 ; -1 ; -3)$ et $\overrightarrow{AC} (2 ; -1 ; 0)$.

   Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc ce sont des vecteurs directeurs du plan (ABC).

   $\begin{cases} x = -2 + 7t + 2s \\ y = 3 - t - s \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique du plan (ABC).

2. Le point D(-1 ; 3 ; 7) appartient-il au plan (ABC) ?

   Si D $\in$ (ABC) , il existe t et s réels tels que $\begin{cases} -1 = -2 + 7t + 2s \\ 3 = 3 - t - s \\ 7 = 1 - 3t \end{cases}$

   $\begin{cases} -1 = -2 + 7t + 2s \\ 3 = 3 - t - s \\ 7 = 1 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 7t + 2s \\ t = -s \\ -2 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 7t + 2s \\ 2 = s \\ -2 = t \end{cases}$

   Vérifions la première équation : $7t + 2s = -14 + 4 = -10$ Elle n'est pas vérifiée.

   Donc D $\notin$ (ABC).