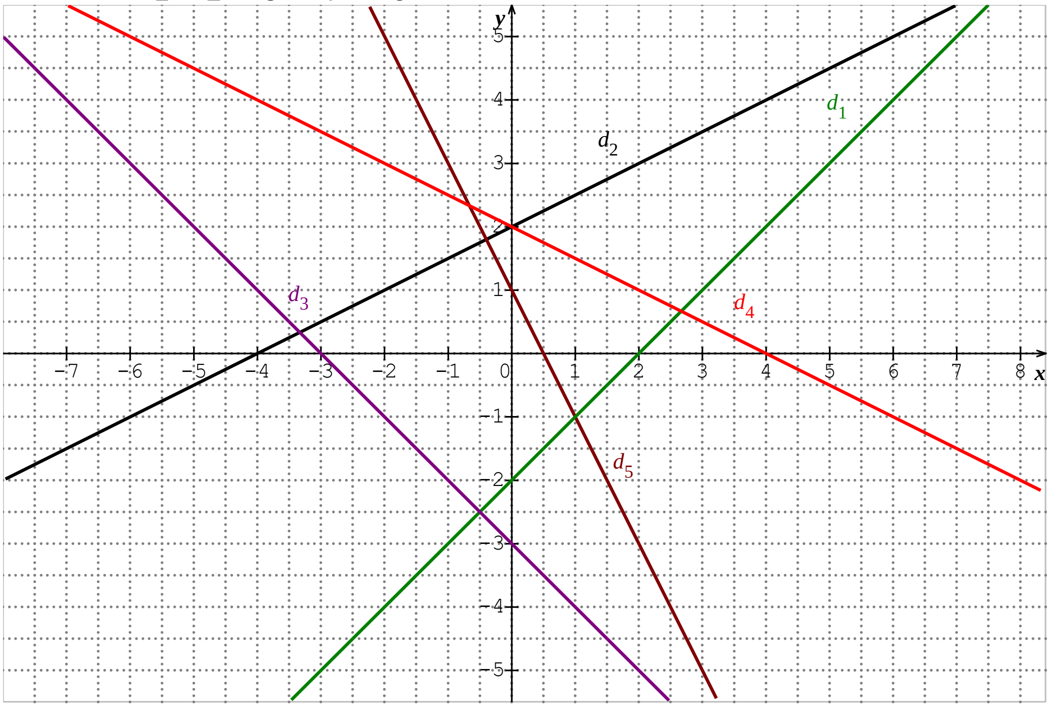
1STMG Révisions Fonctions affines

Exercice 1:

Déterminer les expressions puis tracer le tableau de signes des fonctions affines f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 représentées par les droites d_1, d_2, d_3, d_4 et d_5.



Exercice 2: Étudier les variations et le signe des fonctions f, g, h, i, j et k définies sur les réels par :

$f(x) = 5x - 1$ $\qquad$ $g(x) = -3x - 4$ $\qquad$ $h(x) = -2\,(x + 3)$

$i(x) = \dfrac{1}{2}x - 2$ $\qquad$ $j(x) = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{3}$ $\qquad$ $k(x) = -\sqrt{2}\,x + 3$

Exercice 3:

f est une fonction affine qui vérifie $f(-2) = -6$ et $f(3) = 8$. Déterminer l'expression de f.

Exercice 4:

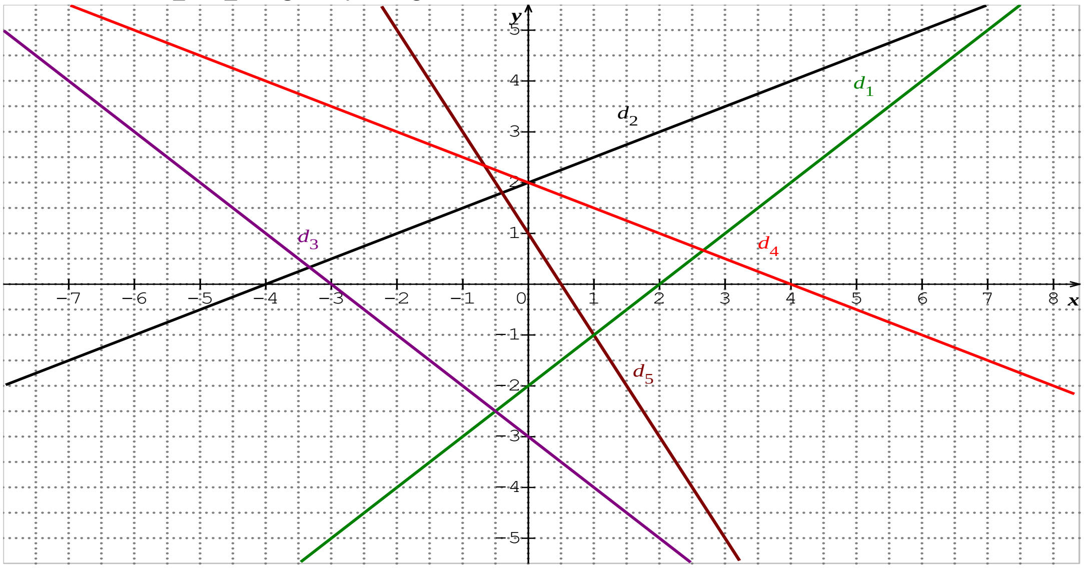
La facture d'eau potable se compose d'une taxe fixe (location du compteur) à laquelle s'ajoute de prix de l'eau consommée. Une compagnie a facturé 134,40€ pour une consommation de 123 m^3 et 242,40€ pour une consommation de 258 m^3.

a) Exprimer le montant de la facture en fonction de la consommation d'eau.
   Représenter graphiquement la fonction sur l'intervalle [0 ; 300]
b) Combien serait facturée une consommation de 100 m^3?
c) A quelle consommation correspond une facture de 200€ ?

1STMG CORRECTION Révisions Fonctions affines

Exercice 1:

Déterminer les expressions puis le signe les fonctions affines f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 représentées par les droites d_1, d_2, d_3, d_4 et d_5.



Une fonction affine est de la forme $f(x) = \mathrm{m}\,x + \mathrm{p}$.

Pour f_1 : La droite d_1 coupe l'axe des ordonnées en y = – 2 donc **p = – 2.**

La droite d_1 passe par les points A(0 ; – 2) et B(2 ; 0).

Par lecture $\mathbf{m} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2}{2} = \mathbf{1}$. Par calcul $\mathbf{m} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-(-2)}{2-0} = \dfrac{2}{2} = \mathbf{1}$

Donc $f_1(x) = 1\,x - 2$ donc $\mathbf{f_1(x) = x - 2}$

Pour le tableau de signes de f_1 :

Par lecture graphique :

Une fonction est positive lorsque sa représentation graphique est située au-dessus de l'axe des abscisses.

Une fonction est négative lorsque sa représentation graphique est située au-dessous de l'axe des abscisses.

Une fonction est nulle lorsque sa représentation graphique coupe l'axe des abscisses.

Par le calcul :

On résout $f(x) \geq 0$ pour trouver l'intervalle où $f(x)$ est positif.

$f_1(x) = x - 2$ $\quad x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

On a donc le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
Signes de $f_1(x)$	– 0 +

Pour f_2 : La droite d_2 coupe l'axe des ordonnées en y = 2 donc **p = 2.**

La droite d_2 passe par les points C(0 ; 2) et D(– 4 ; 0).

Par lecture $\mathbf{m} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$. Par calcul $\mathbf{m} = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{0-2}{-4-0} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

Donc $f_2(x) = \dfrac{1}{2}x + 2.$

Pour le tableau de signes de f_2 :

$\dfrac{1}{2}x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{2}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \geq -2 \times 2 \Leftrightarrow x \geq -4$

On a donc le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$ -4 $+\infty$
Signes de $f_2(x)$	– 0 +

Pour f_3 : La droite d_3 coupe l'axe des ordonnées en y = – 3 donc **p = – 3.**

La droite d_3 passe par les points E(0 ; – 3) et F(– 3 ; 0).

Par lecture $\mathbf{m} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-3}{3} = \mathbf{-1}$. Par calcul $\mathbf{m} = \dfrac{y_E - y_F}{x_E - x_F} = \dfrac{0-(-3)}{-3-0} = \dfrac{3}{-3} = \mathbf{-1}$

Donc $f_3(x) = -x - 3.$

Pour le tableau de signes de f_3 :

$-x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3$ **(on divise par un nombre négatif donc on change le sens de l'inéquation)**

On a donc le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$ -3 $+\infty$
Signes de $f_3(x)$	+ 0 –

Pour f_4 : La droite d_4 coupe l'axe des ordonnées en y = 2 donc **p = 2.**

La droite d_4 passe par les points G(0 ; 2) et H(4 ; 0).

Par lecture $\mathbf{m} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$. Par calcul $\mathbf{m} = \dfrac{y_G - y_H}{x_G - x_H} = \dfrac{0-2}{4-0} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

Donc $f_4(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2.$

Pour le tableau de signes de f_4 :

$-\dfrac{1}{2}x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{-2}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \leq (-2) \times (-2) \Leftrightarrow x \leq 4$

On a donc le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$ 4 $+\infty$
Signes de $f_4(x)$	+ 0 –

Pour f_5 : La droite d_5 coupe l'axe des ordonnées en y = 1 donc **p = 1.**

La droite d_5 passe par les points K(0 ; 1) et L(2 ; – 3).

Par lecture $\mathbf{m} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-4}{2} = \mathbf{-2}$. Par calcul $\mathbf{m} = \dfrac{y_L - y_K}{x_L - x_K} = \dfrac{-3-1}{2-0} = \dfrac{-4}{2} = \mathbf{-2}$

Donc $f_5(x) = -2x + 1.$

Pour le tableau de signes de f_5 :

$-2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{-1}{-2} \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq 0{,}5$

On a donc le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$ $0{,}5$ $+\infty$
Signes de $f_5(x)$	+ 0 –

Exercice 2:

Étudier les variations et le signe des fonctions f, g, h, i, j et k définies sur les réels par :

$f(x) = 5x - 1$ $\qquad$ $g(x) = -3x - 4$ $\qquad$ $h(x) = -2(x + 3)$

$i(x) = \frac{1}{2}x - 2$ $\qquad$ $j(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{3}$ $\qquad$ $k(x) = -\sqrt{2}\,x + 3$

Une fonction affine s'annule pour $x = -\frac{p}{m}$.
Si m> 0 elle est croissante et elle est donc négative avant le zéro et positive après.
Si m< 0 elle est décroissante et elle est donc positive avant le zéro et négative après.

On a donc les tableaux de variations et de signes suivants:

Pour f : m = 5 et p = – 1 m > 0 donc f est croissante et f s'annule pour $x = \frac{1}{5}$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
Signes de $f(x)$		$-$	0	$+$	

Pour g : m = – 3 et p = – 4 m < 0 donc g est décroissante et g s'annule pour $x = -\frac{4}{3}$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de g	$\searrow$	

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
Signes de $g(x)$		$+$	0	$-$	

Pour h : m = – 2 et p = – 6 m < 0 donc h est décroissante et h s'annule pour $x = -\frac{6}{2} = -3$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de h	$\searrow$	

Tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signes de $h(x)$		$+$	0	$-$	

Pour i : $m = \frac{1}{2}$ et p = – 2 m > 0 donc i est croissante et i s'annule pour $x = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \times 2 = 4$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de i	$\nearrow$	

Tableau de signes :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
Signes de $i(x)$		$-$	0	$+$	

Pour j : $m = \frac{3}{4}$ et $p = -\frac{1}{3}$ m > 0 donc j est croissante et j s'annule pour $x = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{9}$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de j	$\nearrow$	

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{4}{9}$		$+\infty$
Signes de j (x)		$-$	0	$+$	

Pour k : $m = -\sqrt{2}$ et $p = 3$ $m < 0$ donc k est décroissante et k s'annule pour $x = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de k	$\searrow$	

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
Signes de $k(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice 3:

f est une fonction affine qui vérifie $f(-2) = -6$ et $f(3) = 8$

Déterminer l'expression de f .

On a $f(x) = mx + p$
avec $f(-2) = -6$ et $f(3) = 8$.

Calcul de m : $m = \dfrac{8-(-6)}{3-(-2)} = \dfrac{14}{5}$

Calcul de p : $p = 8 - \dfrac{14}{5} \times 3 = 8 - 8{,}4 = -0{,}4 = -\dfrac{2}{5}$.

Donc $f(x) = \dfrac{14}{5}x - \dfrac{2}{5}$.

Exercice 4:

La facture d'eau potable se compose d'une taxe fixe (location du compteur) à laquelle s'ajoute de prix de l'eau consommée. Une compagnie a facturé 134,40€ pour une consommation de 123 m^3
et 242,40€ pour une consommation de 258 m^3.

a) Exprimer le montant de la facture en fonction de la consommation d'eau.
Représenter graphiquement la fonction sur l'intervalle [0 ; 300].

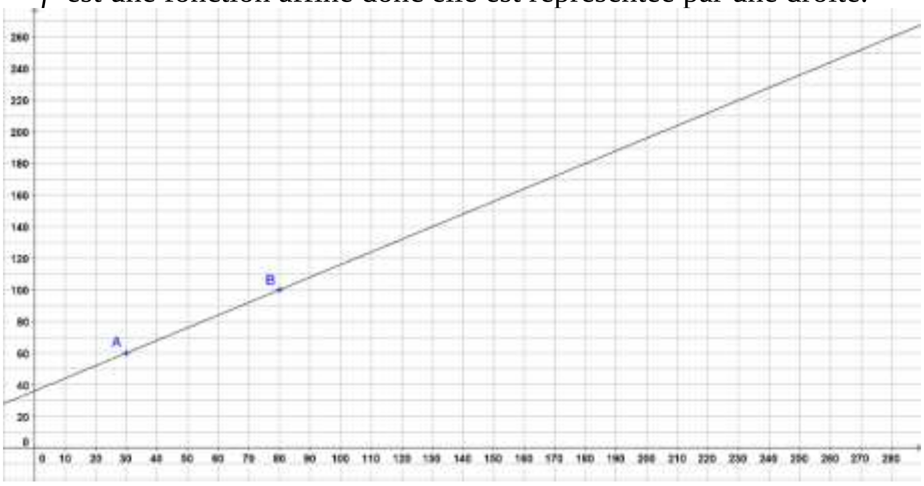
Soit x le nombre de m^3 d'eau consommés. $f(x)$ est le montant de la facture en euros.
La facture se compose d'une partie variable et d'une partie fixe donc on a $f(x) = mx + p$
avec $f(123) = 134{,}40$ et $f(258) = 242{,}40$.

Calcul de m : $m = \dfrac{242{,}40 - 134{,}4}{258-123} = \dfrac{108}{135} = \dfrac{4}{5}$

Calcul de p : $p = 134{,}40 - \dfrac{4}{5} \times 123 = 134{,}40 - 98{,}40 = 36$.

Donc $f(x) = \dfrac{4}{5}x + 36$. La location du compteur est donc de 36€ par mois.

f est une fonction affine donc elle est représentée par une droite.



b) Combien serait facturée une consommation de 100 m^3?

$f(100) = \frac{4}{5} \times 100 + 36 = 116$. La facture pour 100$m^3$ sera de 116€.

c) A quelle consommation correspond une facture de 200€ ?

Il faut résoudre $f(x) = 200$.

$f(x) = 200 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x + 36 = 200 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x = 164 \Leftrightarrow x = 164 \times \frac{5}{4} = 205.$

Une facture de 200€ correspond à une consommation de 205m^3 .