LES FONCTIONS AFFINES

I. Caractérisation d'une fonction affine :

1) Quelques définitions :

Soit m et p deux réels.
La fonction f telle que $f(x) = mx + p$ est appelée fonction affine.
Son ensemble de définition est $D_f =]-\infty\,;+\infty[= \mathbb{R}$

m est appelé coefficient directeur. p est appelé ordonnée à l'origine.

Cas particuliers :

Si m = 0 alors $f(x) = p$ est une fonction constante.
Si p = 0 alors $f(x) = m\,x$ est une fonction linéaire.

Exemple : Compléter le tableau suivant :

Fonction	Affine (oui–non)	Linéaire (oui–non)	Constante (oui–non)	Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine
$f(x) = -5x + 2$	*oui*	*non*	*non*	*– 5*	*2*
$g(x) = 3$	*oui*	*non*	*oui*	*0*	*3*
$h(x) = 4x$	*oui*	*oui*	*non*	*4*	*0*
$k(x) = 7 - 2x$	*oui*	*non*	*non*	*–2*	*7*
$r(x) = \frac{7}{x} - 2$	*non*	*non*	*non*		
$s(x) = \frac{1}{2}x - 6$	*oui*	*non*	*non*	$\frac{1}{2}$	*– 6*

2) Propriété caractéristique d'une fonction affine :

***f* est une fonction définie sur IR.**

***f* est une fonction affine si et seulement si, pour tous réels distincts a et b, le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constant.**

Démonstration (à na pas connaitre par cœur):

Implication : si f affine alors $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constant.

Posons $f(x) = m\,x + p$. Alors $f(b) = m\,b + p$ et $f(a) = m\,a + p$.
Donc $f(b) - f(a) = mb + p - ma - p = mb - ma = m\,(b - a)$

Et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{m(b-a)}{b-a} = m$ donc $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est bien une constante.

Réciproque : si le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constant alors f est une fonction affine.

Si $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constant, avec $b \neq a$, cela signifie que

Pour tout réel $x \neq a$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est constant.

On peut donc poser $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c$ avec c un réel.

On a alors $f(x) - f(a) = c\,(x - a)$ donc $f(x) = c\,x \underbrace{-\,c\,a + f(a)}_{\text{constante}} = c\,x + d$.

On retrouve donc l'écriture d'une fonction affine.

Si $x = a$, on pose $\frac{f(b)-f(x)}{b-x} = \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = c$ et on reproduit le même raisonnement.

3) Conséquence :

Si on connait les images de a et b deux réels distincts par une fonction affine f alors

$f(x) = mx + p$ avec $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et $p = f(a) - ma$ *ou* $p = f(b) - mb$.

Exemple : Soit f une fonction affine vérifiant $f(5) = 1$ et $f(-2) = 3$. Retrouver l'expression de f.

$$f(x) = mx + p \quad \text{avec} \quad m = \frac{f(5) - f(-2)}{5 + 2} = \frac{1 - 3}{7} = -\frac{2}{7}$$

$$p = f(5) + \frac{2}{7} \times 5 = 1 + \frac{10}{7} = \frac{7}{7} + \frac{10}{7} = \frac{17}{7} \quad \text{donc} \quad f(x) = -\frac{2}{7}x + \frac{17}{7}$$

II. Représentation graphique d'une fonction affine :

Une fonction affine f définie sur IR par $f(x) = mx + p$ est représentée par une droite d'équation $y = mx + p$, qui coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ; p).

Cas particuliers :

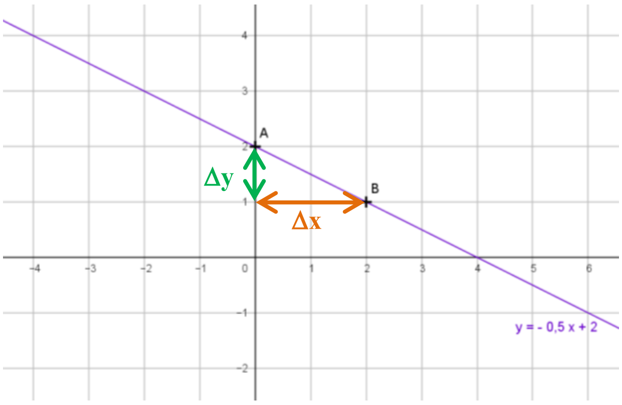
si f est linéaire, p = 0 et la droite représentant f passe par l'origine.

si f est constante, m = 0 et la droite représentant f est parallèle à l'axe des abscisses.

Pour tracer la droite représentant une fonction affine f, il suffit de placer deux points A (a ; f(a)) et B (b ; f(b)).

Exemple : Représenter la fonction f définie par : $f(x) = -0,5x + 2$.

- *On choisit deux abscisses, par exemple 0 et 2.*
- *On calcule $f(0)$ et $f(2)$. $f(0) = -0,5 \times 0 + 2 = 2$ et $f(2) = -0,5 \times 2 + 2 = -1 + 2 = 1$*
- *On place les deux points A (0 ; 2) et B (2 ; 1) et on trace la droite (AB).*



Remarque : $m = -0,5 = \dfrac{-1}{2} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ et $p = f(0)$.

Cette remarque permet de lire dans de très nombreux cas l'équation de la droite dessinée.

Exemple : Soit A (5 ; −2) et B (−1 ; 3) deux points du plan. Déterminer l'équation de la droite (AB) .

La droite (AB) a une équation de la forme $y = m\,x + p$.

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{y_A - y_B}}{\boldsymbol{x_A - x_B}} = \frac{-2-3}{5-(-1)} = \frac{-5}{6} \quad \text{donc on a} \quad y = \frac{-5}{6}\,x + p$$

$$A \in (AB) \text{ donc } y_A = \frac{-5}{6}\,x_A + p \text{ donc } -2 = \frac{-5}{6} \times 5 + \mathrm{p} \quad \text{d'où} \quad p = -2 + \frac{25}{6} = \frac{13}{6}$$

La droite (AB) a pour équation $y = \frac{-5}{6}x + \frac{13}{6}$