

I. Définitions des différentes limites:

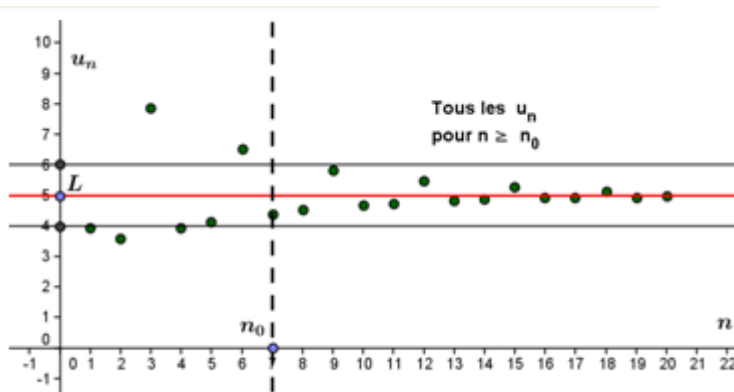
1) Limite finie :

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ , $\ell \in \mathbb{R}$, si tout intervalle ouvert, contenant ℓ , contient tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang.

On écrira alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et on dira que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente ou que la suite (u_n) converge vers ℓ .

Remarques :

- La limite d'une suite ne peut s'étudier qu'en $+\infty$, car n est un entier naturel.
- On écrit donc parfois $\lim u_n = \ell$.
- L'intervalle ouvert contenant ℓ est aussi petit qu'on veut. C'est comme si tous les points qui représentent les termes de la suite étaient contenus dans un tube à partir d'un certain rang.



- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite finie, celle-ci est unique.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Exemple : $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$u_0 = 4$; $u_1 = \frac{5}{2} = 2,5$; $u_2 = \frac{10}{3} \approx 3,3$; $u_3 = \frac{11}{4} = 2,75$... Cette suite semble avoir pour limite 3.

Pour justifier cette limite, on va choisir un intervalle ouvert centré sur 3, par exemple $]2,75 ; 3,25[$. On doit alors démontrer que tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang, sont dans cet intervalle.

On cherche donc un rang n tel que $2,75 < u_n < 3,25$.

$$2,75 < u_n < 3,25 \Leftrightarrow 2,75 < 3 + \frac{(-1)^n}{n+1} < 3,25 \Leftrightarrow -0,25 < \frac{(-1)^n}{n+1} < 0,25$$

$$\Leftrightarrow 0 < \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| < 0,25 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < 0,25 \Leftrightarrow n+1 > 4 \Leftrightarrow n > 3.$$

A partir du rang 4, $u_n \in]2,75 ; 3,25[$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite 3.

On écrira $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{(-1)^n}{n+1} = 3$.

Limites de référence à connaître :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{\sqrt{n}} = 0 \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

2) Limite infinie :

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si, pour tout nombre A positif, l'inégalité $u_n \geq A$ est vraie à partir d'un certain rang n .

L'intervalle $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sauf un nombre fini de termes.

On écrira alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et on dira que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Exemple : $u_n = 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Si $A = 1\,000$ $u_n \geq A \Leftrightarrow 2^n \geq 1\,000 \Leftrightarrow n \geq 10$

A partir du rang 10, tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont supérieurs à A

A l'exception des 10 premiers termes, tous les autres sont dans l'intervalle $[A; +\infty[$.

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

De même :

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si, pour tout nombre A négatif, l'inégalité $u_n \leq A$ est vraie à partir d'un certain rang n .

L'intervalle $] -\infty; A]$ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sauf un nombre fini de termes.

On écrira alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ et on dira que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Limites de référence à connaître :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} -n^3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n} = -\infty$$

3) Suites particulières :

a) Suites arithmétiques: $u_n = u_0 + n \times r$

Si $r > 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante

$u_n = u_0 + n \times r$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times r = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Si $r < 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante

$u_n = u_0 + n \times r$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times r = -\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

b) Suites géométriques: $u_n = u_0 \times q^n$

Si $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm \infty$ (dépend du signe de u_0)
la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Si $q = 1$ la suite est constante, $u_n = u_0$ et donc convergente de limite u_0 .

Si $-1 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Si $q \leq -1$ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

4) Méthode de recherche des limites :

a) Suites définies par une fonction:

Si $u_n = f(n)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ (avec $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ ou $a = -\infty$) alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

Attention : La réciproque est fausse !!

$f(x) = \cos(2\pi x)$ f n'a pas de limite en $+\infty$.

mais $u_n = f(n) = \cos(2\pi \times n) = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$

donc (u_n) est une suite constante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

b) Comparaisons:

Si, à partir d'un certain rang, deux suites convergentes vérifient $u_n \leq v_n$
avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$ alors $\ell \leq \ell'$.

Théorème des gendarmes :

Si, à partir d'un certain rang, on a $v_n \leq u_n \leq w_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Applications :

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ avec $v_n \leq u_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$ avec $u_n \leq w_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple : $u_n = \frac{\sin n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

c) Théorèmes de convergence (admis) :

Si une suite (u_n) est croissante et majorée par un réel M alors cette suite est convergente et sa limite ℓ vérifie $\ell \leq M$.

Si une suite (u_n) est décroissante et minorée par un réel m alors cette suite est convergente et sa limite ℓ vérifie $\ell \geq m$.

ATTENTION ! Ces théorèmes ne donnent pas la limite de la suite. Ils assurent juste son existence.

II. Opérations sur les limites :

a représente soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

1) Somme de deux suites :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$ \diagdown $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I
$+\infty$	$+\infty$	F.I	$+\infty$

2) Produit de deux suites :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$ \diagdown $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$\ell' \in \mathbb{R}$ $\ell' \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\ell \in \mathbb{R}$ $\ell \neq 0$	$\ell \times \ell'$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	0
$-\infty$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	F.I
$+\infty$	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$	$-\infty$	$+\infty$	F.I
0	0	F.I	F.I	0

3) Inverse d'une suite :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$\ell \in \mathbb{R}$ $\ell \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} =$	$\frac{1}{\ell}$	0	0	$+\infty$ si $u_n > 0$ $-\infty$ si $u_n < 0$

4) Quotient de deux suites :

$\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = u_n \times \left(\frac{1}{v_n}\right)$. On applique alors les règles des produits et de l'inverse (2 et 3).

5) Formes indéterminées :

$$+\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Pour lever une indétermination il faudra transformer l'expression du terme général de la suite, soit en factorisant et en simplifiant ensuite l'expression, soit en développant l'expression, soit en faisant preuve d'ingéniosité !