

LES FONCTIONS AFFINES

I. Caractérisation d'une fonction affine :

1) Quelques définitions :

Soit m et p deux réels.

La fonction f telle que $f(x) = mx + p$ est appelée

Son ensemble de définition est

m est appelé p est appelé

Cas particuliers :

Si $m = 0$ alors $f(x) = p$ est une fonction

Si $p = 0$ alors $f(x) = mx$ est une fonction

Exemple : Compléter le tableau suivant :

Fonction	Affine (oui-non)	Linéaire (oui-non)	Constante (oui-non)	Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine
$f(x) = -5x + 2$					
$g(x) = 3$					
$h(x) = 4x$					
$k(x) = 7 - 2x$					
$r(x) = \frac{7}{x} - 2$					
$s(x) = \frac{1}{2}x - 6$					

2) Propriété caractéristique d'une fonction affine :

f est une fonction définie sur \mathbb{R} .

f est une fonction affine si et seulement si, pour tous réels distincts a et b , le rapport $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant.

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le taux d'accroissement de la fonction f entre a et b .

Démonstration (à ne pas connaître par cœur):

Implication : si f affine alors $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant.

Posons $f(x) = mx + p$. Alors $f(b) = mb + p$ et $f(a) = ma + p$.

Donc $f(b) - f(a) = mb + p - ma - p = mb - ma = m(b - a)$

Et $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{m(b - a)}{b - a} = m$ donc $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est bien une constante.

Réciproque : si le quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant alors f est une fonction affine.

Si $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est constant, avec $b \neq a$, cela signifie que

Pour tout réel $x \neq a$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est constant.

On peut donc poser $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c$ avec c un réel.

On a alors $f(x) - f(a) = c(x - a)$ donc $f(x) = cx - \underbrace{ca}_{\text{constante}} + f(a) = cx + d$.

On retrouve donc l'écriture d'une fonction affine.

Si $x = a$, on pose $\frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = c$ et on reproduit le même raisonnement.

3) Conséquence :

Si on connaît les images de a et b deux réels distincts par une fonction affine f alors

$$f(x) = m x + p \text{ avec } m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ et } p = f(a) - m a \text{ ou } p = f(b) - m b.$$

Exemple : Soit f une fonction affine vérifiant $f(5) = 1$ et $f(-2) = 3$. Retrouver l'expression de f .

II. Représentation graphique d'une fonction affine :

Une fonction affine f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = m x + p$ est représentée par une droite d'équation $y = m x + p$, qui coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; p)$.

Cas particuliers :

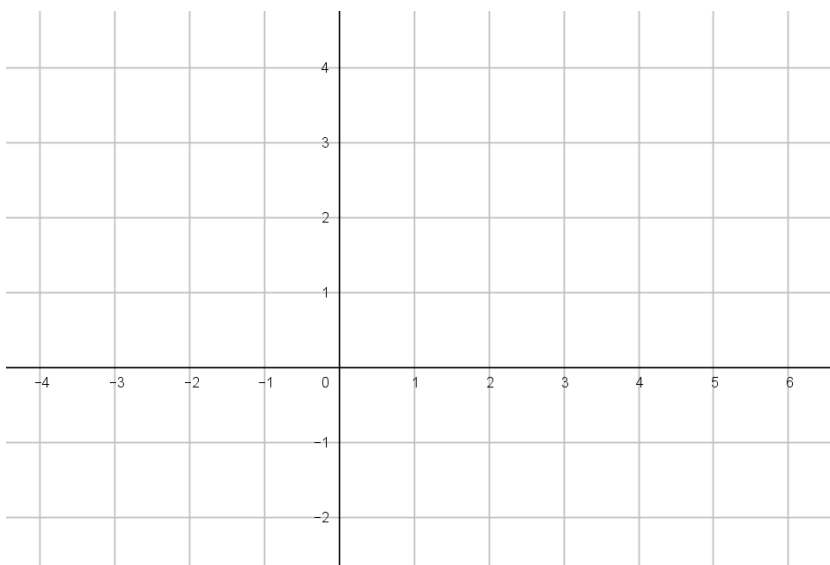
si f est linéaire, $p = 0$ et la droite représentant f passe par l'origine.

si f est constante, $m = 0$ et la droite représentant f est parallèle à l'axe des abscisses.

Pour tracer la droite représentant une fonction affine f , il suffit de placer deux points

$A(a ; f(a))$ et $B(b ; f(b))$.

Exemple : Représenter la fonction f définie par : $f(x) = -0,5 x + 2$.



Remarque : $m = -0,5 = \frac{-1}{2} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ et $p = f(0)$.

Cette remarque permet de lire dans de très nombreux cas l'équation de la droite dessinée.

Exemple : Soit A (5 ; -2) et B (-1 ; 3) deux points du plan. Déterminer l'équation de la droite (AB) .

III. Etude d'une fonction affine :

1) Variations d'une fonction affine f définie sur IR par $f(x) = m x + p$:

Si $m > 0$ la fonction affine f est strictement croissante sur IR.

Si $m < 0$ la fonction affine f est strictement décroissante sur IR.

Si $m = 0$ la fonction affine f est constante sur IR.

Tableau de variations si $m > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f		

Tableau de variations si $m < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f		

Démonstration :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Si $m > 0$ alors $m a < m b$ donc $m a + p < m b + p$ donc $f(a) < f(b)$

l'ordre n'est pas perturbé, la fonction est croissante.

Si $m < 0$ alors $m a > m b$ donc $m a + p > m b + p$ donc $f(a) > f(b)$

l'ordre est perturbé, la fonction est décroissante.

Exemple : Compléter les tableaux de variations de f et g définies sur IR par $f(x) = 3 - 2x$ et $g(x) = 5x + 4$

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f		

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de g		

2) Parité d'une fonction affine f définie sur IR par $f(x) = m x + p$:

Parmi les fonctions affines, seules les fonctions linéaires sont impaires et seules les fonctions constantes sont paires.

Démonstration :

Une fonction linéaire est impaire. En effet si $f(x) = mx$ alors $f(-x) = -mx = -f(x)$

Une fonction constante est paire. En effet si $f(x) = p$ alors $f(-x) = p = f(x)$

Réciproquement:

- si f est impaire alors $f(-x) = -f(x)$ pour tout les réels x
donc $-mx + p = -mx - p$ donc $2p = 0$ donc $p = 0$. La fonction f est donc linéaire.
- si f est paire alors $f(-x) = f(x)$ pour tout les réels x
donc $-mx + p = mx + p$ donc $-mx = mx$ donc $2mx = 0$ pour tout x donc $m = 0$.
La fonction f est donc constante.

3) Signe d'une fonction affine f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = m x + p$:

Si $m \neq 0$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

La fonction f s'annule pour $x = \dots\dots\dots$

Si $m \neq 0$ $f(x) > 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

si $m > 0$ $\dots\dots\dots$

f sera positive sur $\dots\dots\dots$

si $m < 0$ $\dots\dots\dots$

f sera positive sur $\dots\dots\dots$

Si $m \neq 0$ $f(x) < 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

si $m > 0$ $\dots\dots\dots$

f sera négative sur $\dots\dots\dots$

si $m < 0$ $\dots\dots\dots$

f sera négative sur $\dots\dots\dots$

Si $m = 0$ f est constante, $f(x) = p$ donc f est du même signe que $\dots\dots\dots$

Tableau de signes si $m > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f(x) = m x + p$		

Tableau de signes si $m < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f(x) = m x + p$		

Remarque : à droite du 0, on retrouve toujours le signe de m .

Exemple : Compléter le tableau de signes de la fonction affine f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -3x + 8$

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $\dots\dots\dots$		

IV. Applications du signe d'une fonction affine aux résolutions d'inéquations :

1) Signe d'un produit :

Exemple : Résoudre l'inéquation $(5x - 2)(-3x + 4) < 0$

Il faut étudier le signe de chacun des facteurs du produit.



Il faut faire un tableau regroupant les signes des deux facteurs et le signe de leur produit.

signe de $5x - 2$	
signe de $-3x + 4$	
signe de $(5x - 2)(-3x + 4)$	

Il faut répondre à la question posée en donnant un ensemble de solutions.

On veut que le produit soit

C'est le cas sur et sur

Donc on écrit $S = \dots\dots\dots$

2) Signe d'un quotient :

Exemple : Résoudre l'inéquation $\frac{4 - 2x}{7x + 3} \geq 0$

Il faut étudier le signe de chacun du numérateur et du dénominateur.



Il faut faire un tableau regroupant les signes des numérateurs et dénominateurs et le signe du quotient.

signe de $4 - 2x$	
signe de $7x + 3$	
signe de $\frac{4 - 2x}{7x + 3}$	

Il faut répondre à la question posée en donnant un ensemble de solutions.

On veut que le produit soit

C'est le cas sur

Donc on écrit $S = \dots\dots\dots$

V. Utilisation de la calculette :

- Pour rentrer une fonction dans la calculette, on va dans le menu $f(x)$ et on rentre l'expression de la fonction dans Y1 par exemple.
- On peut afficher la droite représentative en appuyant sur graphe.
- On peut afficher un tableau de valeurs en appuyant sur table (2nde graphe)
- On peut résoudre des équations en choisissant le menu résol puis 2: PlySmlt2 puis 1 : Racines d'un polynôme on choisit DEGRE 1 REEL AUTO NORMAL FLOTT puis SUIV. en appuyant sur la touche graphe on rentre l'équation à résoudre puis RESOL en appuyant sur la touche graphe La solution s'affiche.