Chapitre 3 Loi Binomiale

0. Un peu d'histoire

Loi Binomiale

Jacques (Jacob) Bernoulli et son frère Jean (Johann) Bernoulli sont les premiers d'une longue lignée de mathématiciens suisses très brillants, dont les recherches ont émaillé tout le XVIIIe siècle. C'est notamment grâce aux deux frères, que séparait pourtant une violente querelle, que le calcul différentiel de Leibniz a connu un tel succès.
On doit à Jacques de nombreux travaux en analyse et en mécanique (équations différentielles liées à l'étude de courbes remarquables, convergence des séries infinies, première approche du nombre e comme limite d'une suite, etc.) ainsi qu'en géométrie et surtout en théorie des probabilités.
En 1713, on publiera à titre posthume son œuvre probabiliste dans l'*Ars Conjectandi* qui reprend et commente les résultats de Huygens et qui ouvre aux calculs sur la loi binomiale. Le résultat le plus important de ce livre (partie IV) légitime l'approche de la notion de probabilité par l'observation des fréquences. Premier exemple de théorème limite en probabilités, il permet aujourd'hui de valider le principe de l'échantillonnage en reliant fréquence et probabilité. Pour Bernoulli lui-même, cependant, ce résultat dépendait d'un projet philosophique beaucoup plus général, qui était de fonder, par le calcul, un art de guider nos jugements dans toutes les circonstances individuelles ou collectives où une décision est nécessaire.

Jacques Bernoulli : lettre à un amy

« Lettre à un amy, sur les parties du jeu de paume » est une lettre publiée en 1713 dans l'*Ars Conjectandi*. Jacques Bernoulli y donne, entre autres, les probabilités de gagner lors d'une partie de jeu de paume, ancêtre de notre tennis moderne. Cette lettre donne des résultats mathématiques concrets appliqués à la vie de tous les jours et s'éloigne de documents mathématiques très théoriques.

JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.

À noter que la façon de compter les points au jeu de paume est la même qu'au tennis, sauf qu'après avoir gagné un troisième échange, on comptabilise 45 points et non 40 comme au tennis.

Deux joueurs A et B de même force jouent ensemble. La table de Bernoulli ci-contre donne les probabilités de gagner du joueur A en fonction du score.
Par exemple, sur un score de 15-30, le joueur A a une probabilité de $\frac{5}{16}$ de gagner, ce qui est noté $\frac{5}{16}$J.
Même si, pour gagner, il faut avoir 2 points de plus que son adversaire, on admet que les joueurs étant de même force, ils ont chacun une chance sur deux de gagner.

Points de A	Points de B	Sort de A
45	45	$\frac{1}{2}$J.
30	45	$\frac{1}{4}$J.
15	45	$\frac{1}{8}$J.
0	45	$\frac{1}{16}$J.
30	30	$\frac{1}{2}$J.
15	30	$\frac{5}{16}$J.
0	30	$\frac{3}{16}$J.
15	15	$\frac{1}{2}$J.
0	15	$\frac{11}{32}$J.
0	0	$\frac{1}{2}$J.

1 Expliquer pourquoi, sur un score de 45-45 (chaque joueur a 45 points), le joueur A a une chance sur deux de gagner.

2 Score de 30-45 : le joueur A a 30 points et le joueur B a 45 points.
a) Quelle est la probabilité pour le joueur A de revenir au score 45-45 ?
b) Montrer que dans ce cas, la probabilité que A a de gagner est bien $\frac{1}{4}$J.

3 Score de 15-45 : le joueur A a 15 points et le joueur B a 45 points.
a) Quelle est la probabilité pour le joueur A de revenir au score 30-45 ?
b) Montrer que, dans ce cas, la probabilité que A a de gagner est bien $\frac{1}{8}$J.

4 En s'inspirant des réponses aux questions précédentes et en travaillant de proche en proche, montrer que pour un score de 15-30, la probabilité que A a de gagner est $\frac{5}{16}$J.

I. Avant de commencer p 350

II. Loi de Bernoulli

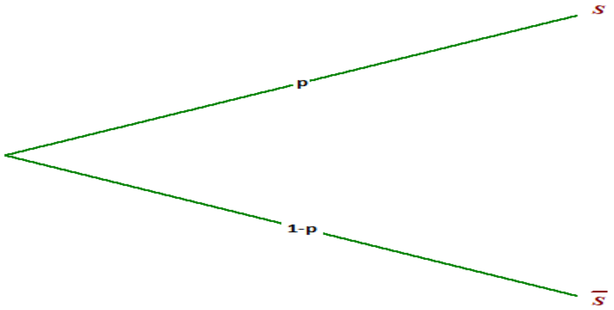
A. Activité p 352

B. Epreuve, loi et schéma de Bernoulli

1. Définition :

On appelle **épreuve de Bernoulli de paramètre p**, toute expérience aléatoire admettant exactement deux issues :

- L'une appelée " succès " notée S dont la probabilité d'apparition est p.
- L'autre appelée " échec " notée $\overline{\mathbf{S}}$ dont la probabilité d'apparition est 1– p.



Exemple : On lance une pièce de monnaie équilibrée, le succès S est "Obtenir Face " , sa probabilité est p = 0,5
L'échec $\overline{S}$ est " Obtenir Pile " , sa probabilité est q = 1– p = 0,5

Remarque : Le mot succès n'est pas porteur de valeur, par exemple, il peut s'agir de S : " La pièce est défectueuse "

2. Loi de Bernoulli

Définition :

Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 si S est réalisé et 0 sinon.
X est appelée **variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p**.
La loi de probabilité de X est appelée **Loi de Bernoulli**
Représentation à l'aide d'un tableau :

x_i	0	1
P(X=x_i)	$1-p$	p

On a : $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$

Propriété :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

L'espérance de X est E(X) = p .

La variance de X est V(X)= p(p–1)

L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)} = \sqrt{p(1-p)}$

Démonstration :

On sait que l'espérance de X est : $E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k \times x_k$
D'où E(X)= p(X=1) ×1 + p(X=0) ×0 = p×1+(1-p)×0 = p
On sait que la variance de X est : $V(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k \left(x_k - E(X)\right)^2$ où $P_k = P(X = k)$
D'où V(X)= p(X=1) ×(1-E(X))² + p(X=0) ×(0-E(X))² = p(1-p)² + (1-p)×(0-p)² = (1-p)×p×(1-p+p) = p(1-p)

3. Schéma de Bernoulli

Définition :

On appelle **Schéma de Bernoulli**, la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**.

Exemple

On a une urne avec 2 boules Blanches et 3 boules Noires, indiscernables au toucher.
On tire une boule au hasard et on la remet dans l'urne après avoir noté sa couleur : B ou N
On répète cette expérience 10 fois. On note le succès S : « La boule est Blanche »

On a bien une expérience de Bernoulli, on la répète de façon identique et indépendante (car il y a remise) 10 fois. Donc on a bien un schéma de Bernoulli.

III. Loi binomiale

1.Définition de la loi binomiale

Soit n un entier naturel non nul et p p un réel de l'intervalle [0 ;1]
On note X la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenu lors de n répétitions identiques et indépendantes d'un **schéma de Bernoulli** dont p est la probabilité du succès.
On dit que X suit la loi binomiale de paramètre n et p. On note B(n ; p)

Remarque : Pour une loi binomiale de n épreuves, on peut formaliser l'univers par $\{0 ; 1\}^n$

2.Propriété :

Soit k un entier naturel inférieur ou égal à n et X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p . Alors $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On rappelle que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

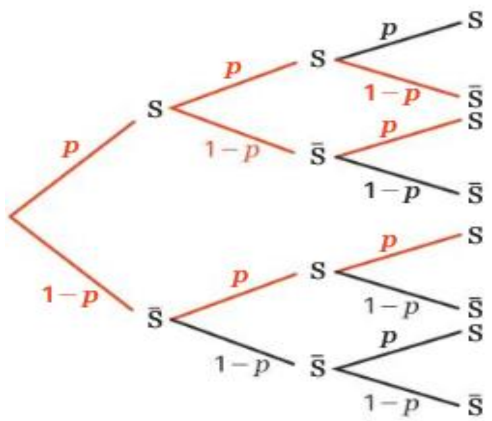
Démonstration :

Dans un schéma de Bernoulli, chaque chemin permettant d'obtenir k succès permet d'obtenir (n-k) échecs.
Chacun de ces chemins a donc pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$

Le nombre de chemins à k succès est égal au nombre de combinaison de k parmi n, c'est-à-dire $\binom{n}{k}$

Donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Exemple de schéma avec n = 3 :



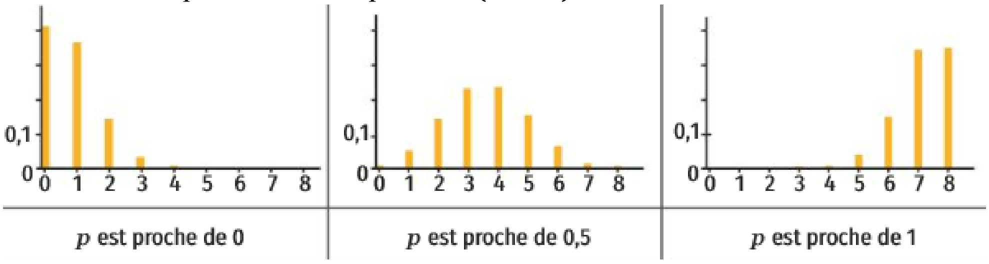
Il y a $\binom{3}{2}$ chemins à 2 succès : $\binom{3}{2} = 3$, les 3 chemins en rouge
La probabilité de chaque chemin est : $p^2(1-p)^{3-2} = p^2(1-p)$
Donc $P(X = 2) = \binom{3}{2} p^2(1-p) = 3p^2(1-p)$

3. Représentation graphique de la loi binomiale

La représentation de la distribution correspondant à une loi binomiale dépend du paramètre p :
Plus p est proche de 0 et plus la probabilité d'obtenir un succès est faible.
Si p devient proche de 1 alors la probabilité d'obtenir un grand nombre de succès sera élevée.

Exemple avec *n=8 et différentes valeurs de p.*

La hauteur de chaque bâton correspond à $P(X = k)$



4. Espérance, variance et écart-type

Propriété :

On considère un schéma de n épreuves de Bernoulli, n entier naturel et p un réel de [0 ; 1].
La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p.
L'espérance mathématique de X est $E(X) = n \times p$
La variance de X est $V(X) = n \times p\,(1 - p)$
L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Remarque : Ces formules ne sont valables que pour une variable aléatoire qui suit une loi binomiale.

Exemple

Si X suit la loi binomiale de paramètre n= 10 et p = $\frac{2}{3}$

On a $E(X)= np= 10\times\frac{2}{36}=\frac{20}{3}E(X) = np = 10 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$

Lorsqu'on répète un très grand nombre de fois cette expérience de dix tirages, alors le nombre moyen de succès est de $\frac{20}{3}$.

On a $V(X)= np(1-p) = 10 \times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{20}{9}$ et $\sigma(X)= \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{\frac{20}{9}} \approx 1{,}49$