CHAPITRE 3 COMBINATOIRE ET DENOMBREMENT

I. Cardinal d'un ensemble :

1) Définition du cardinal d'un ensemble fini :

Soit A un ensemble fini.

Le cardinal de A, noté Card (A) est le nombre d'éléments de l'ensemble A.

Exemple : A = { 1 ; 2 ; 6 ; 9 ; 11 } donc Card(A) = 5

2) Vocabulaire :

La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble de tous les éléments qui sont dans A ou dans B. On la note A ∪ B.

L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble de tous les éléments qui sont à la fois dans A et dans B. On la note A ∩ B.

Deux ensembles sont dits disjoints si leur intersection est vide. A et B disjoints ⇔ A ∩ B = ∅

Exemple : A={ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 } B={ 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 } C={ 20 ; 30 }

A ∪ B = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 } A ∩ B ={ 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 }

A ∪ C = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 20 ; 30 } A ∩ C = ∅

A et C sont disjoints.

3) Propriété admise :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des ensembles finis deux à deux disjoints.

Alors : $$\mathbf{Card}\,(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = Card(A_1) + Card(A_2) + \dots + Card(A_n) = \sum_{k=1}^{n} Card(A_k)$$

4) Produit cartésien de deux ensembles :

Soit A et B deux ensembles non vides.

Le produit cartésien de A et de B, noté $A \times B$ (se lit « A croix B »), est l'ensemble constitué des couples $(x\,;y)$ où x est un élément de A et y un élément de B.

$$A \times B = \{(x; y), x \in A, y \in B\}$$

Exemple :

A= {1 ; 2} et B= {3 ; 4} on a : $A \times B = \{(1;3)\,;\,(1;4)\,;\,(2;3)\,;\,(2;4)\}$

ATTENTION ! Dans un couple , l'ordre est important !

(1 ; 2) n'est pas le même élément que (2 ; 1).

Propriété :

Soit A et B deux ensembles finis. Alors : $\text{Card}\,(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$

Démonstration : (ex 68 p 47)

1. Si A ou B est vide, leur cardinal vaut 0 et le produit $A \times B$ est également vide, de cardinal 0 également. La formule reste valable.

2. Si A = $\{a_1; a_2; \ldots\ldots; a_n\}$ *et* $B = \{b_1; b_2; \ldots\ldots; b_p\}$ et *pour* i *entier naturel*, $i \leq p, A_i = A \times \{b_i\}$
   a. Les éléments de A_i sont les couples (a_k ; b_i) pour k allant de 1 à n.
      Il y a donc n éléments dans chaque A_i.
   b. Les ensembles A_i sont deux à deux disjoints.
      En effet, le deuxième élément d'un couple diffère d'un ensemble A_i à un autre.
   c. L'union des A_i pour i allant de 1 à p est $A \times B$.
      Cette union est une union d'ensembles disjoints donc on a :
      $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A_1) + \ldots + \text{Card}(A_p) = n + \ldots + n = np$

Définition :

Soit A un ensemble et n un entier naturel non nul.

On appelle n-uplet de A un élément de $A^n = A \times A \times \ldots \times A$, ($A$ est n fois)

Propriété :

Soit A un ensemble fini et n un entier naturel non nul. Alors $\text{Card}\,(A^n) = (\text{Card}(A))^n$

Démonstration : Démonstration par récurrence ex 69 p 47.

Application :

Un immeuble est protégé par un digicode. Ce code est formé de 4,5 ou 6 chiffres de 0 à 9

et d'une lettre parmi les 3 lettres A, B ou C. Combien de codes peut-on former avec ce système ?

Réponse : Appelons A_4, A_5, A_6 l'ensemble des codes comportant 4 , 5 ou 6 chiffres. On a:

$\text{Card}(A_4) = Card(\{0\,;1\,\ldots.\,;9\}^4 \times \{A\,;B\,;C\}) = 10^4 \times 3 = 30\,000$

$\text{Card}(A_5) = Card(\{0;1\,\ldots.;9\}^5 \times \{A;B;C\}) = 10^5 \times 3 = 300\,000$

$\text{Card}(A_6) = Card(\{0;1\,\ldots.;9\}^6 \times \{A;B;C\}) = 10^6 \times 3 = 3\,000\,000$

soit au total : 3 330 000 codes possibles.