Chapitre 2 GENERALITES SUR LES FONCTIONS

I. Notion de fonction numérique :

1) Définition , notations et vocabulaire :

Lorsqu'à un nombre x on associe un nombre y , on définit une fonction .
La fonction f est " la machine " qui permet de transformer x en y .

Une fonction est en général notée f, g , h …

Le réel y associé au réel x par la fonction f est noté $f(x)$. C'est l'image de x par f.
Le réel x a qui l'on associe le réel y par la fonction f est l'antécédent de y par f.

La phrase " f est la fonction qui à x associe $f(x)$ ou y " s'écrit

$f: x \longrightarrow f(x)$ ou $f: x \longmapsto y$ ou $y = f(x)$.

$f(x)$ est l'image de x par la fonction f.

L'ensemble $\mathcal{D}_f$ des nombres ayant une image par la fonction f est appelé ensemble de définition de f.
Les nombres x sont des variables.

Exemple : f(5) = 8 ⇔ 8 est l'image de 5 par f ⇔ 5 a pour image 8 par f
⇔ 5 est un antécédent de 8 par f ⇔ 8 a un antécédent qui est 5 par f.

2) Remarques :

Une fonction f n'est pas forcément définie par un calcul , elle peut , par exemple , être définie par une courbe représentative.
Un réel x n'a qu'une seule image possible par une fonction f.
Cette caractéristique permet de savoir si une courbe est la représentation graphique d'une fonction ou non..

On considère les courbes ci-dessous. Pour chacune d'elles indiquer si elles représentent des fonctions ; si la réponse est non, expliquer pourquoi, si la réponse est oui, donner l'ensemble de définition.

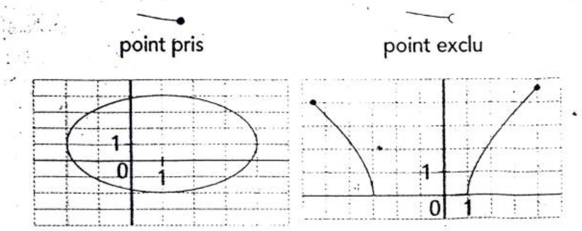


Figure 1 Figure 2

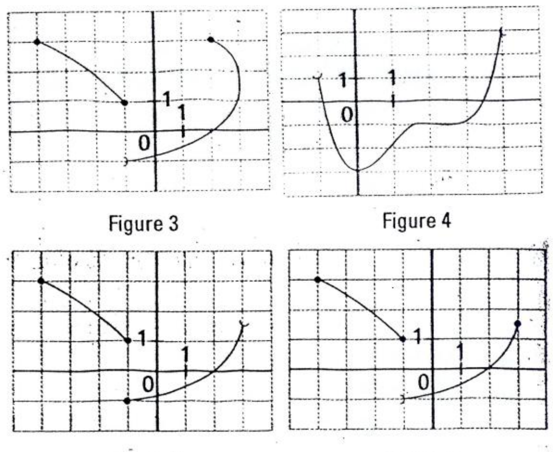


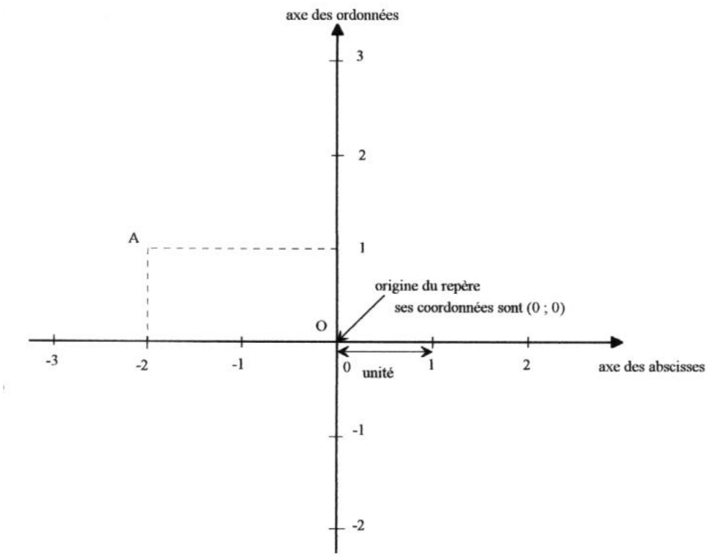
Figure 3 Figure 4 Figure 5 Figure 6

Pour la figure 1 , le nombre 1 a 2 images qui sont – 2 et 4 donc cette courbe n'est pas la représentation d'une fonction.
Pour la figure 2 , tous les nombres qui ont une image n'en ont qu' une seule donc cette courbe est la représentation d'une fonction.
Pour la figure 3 , le nombre 2 a 2 images qui sont 0 et 3 donc cette courbe n'est pas la représentation d'une fonction.
Pour la figure 4 , tous les nombres qui ont une image n'en ont qu' une seule donc cette courbe est la représentation d'une fonction.
Pour la figure 5 , le nombre – 1 a 2 images qui sont – 1 et 1 donc cette courbe n'est pas la représentation d'une fonction.
Pour la figure 4 , tous les nombres qui ont une image n'en ont qu' une seule donc cette courbe est la représentation d'une fonction.

Un réel y peut avoir plusieurs antécédents par f. Il peut aussi n'en avoir aucun.

II. Courbe représentative d'une fonction numérique :

1) Repère du plan :



Les coordonnées du point A sont (- 2 ; 1)
On note : A (–2 ; 1)

abscisse du point A — ordonnée du point A.

Un repère orthogonal est constitué de deux axes perpendiculaires de même origine .

L'axe des abscisses est "horizontal"
L'axe des ordonnées est "vertical".

Un repère orthonormal ou orthonormé est un repère orthogonal ayant la même unité sur chaque axe.

Chaque point du plan est repéré par deux nombres relatifs appelés coordonnées du point.
Le premier nombre cité est toujours l'abscisse et le second l'ordonnée.

2) Définition de la courbe représentative d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$.
On appelle courbe représentative de f l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x ; f(x))$.
On écrira $\mathcal{C}_f = \{ M (x ; y) \text{ avec } x \in \mathcal{D}_f \text{ et } y = f(x) \}$
On dira que l'équation de $\mathcal{C}_f$ est $y = f(x)$.

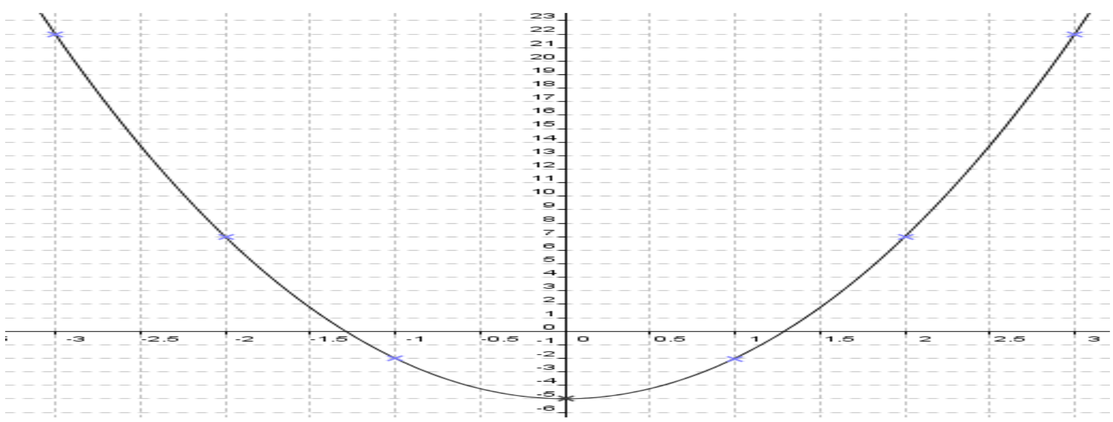
3) Construction de la courbe représentative d'une fonction f :

a) Le tableau de valeurs :

Pour construire la courbe représentative d'une fonction on peut utiliser une construction point par point avec un tableau de valeurs.
Ce tableau de valeurs peut être fait grâce à la calculatrice .
Exemple : Compléter le tableau de valeurs de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 – 5$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	22	7	-2	-5	-2	7	22

b) Le tracé de la courbe représentative de la fonction :



c) Remarque :

Si le point A de coordonnées $(-2 ; 7)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f cela signifie que :

$f(-2) = 7$ ou que l'image de -2 par f est 7 ou que 7 est l'antécédent de -2 par f.

III. Lecture d'images et d'antécédents sur une courbe :

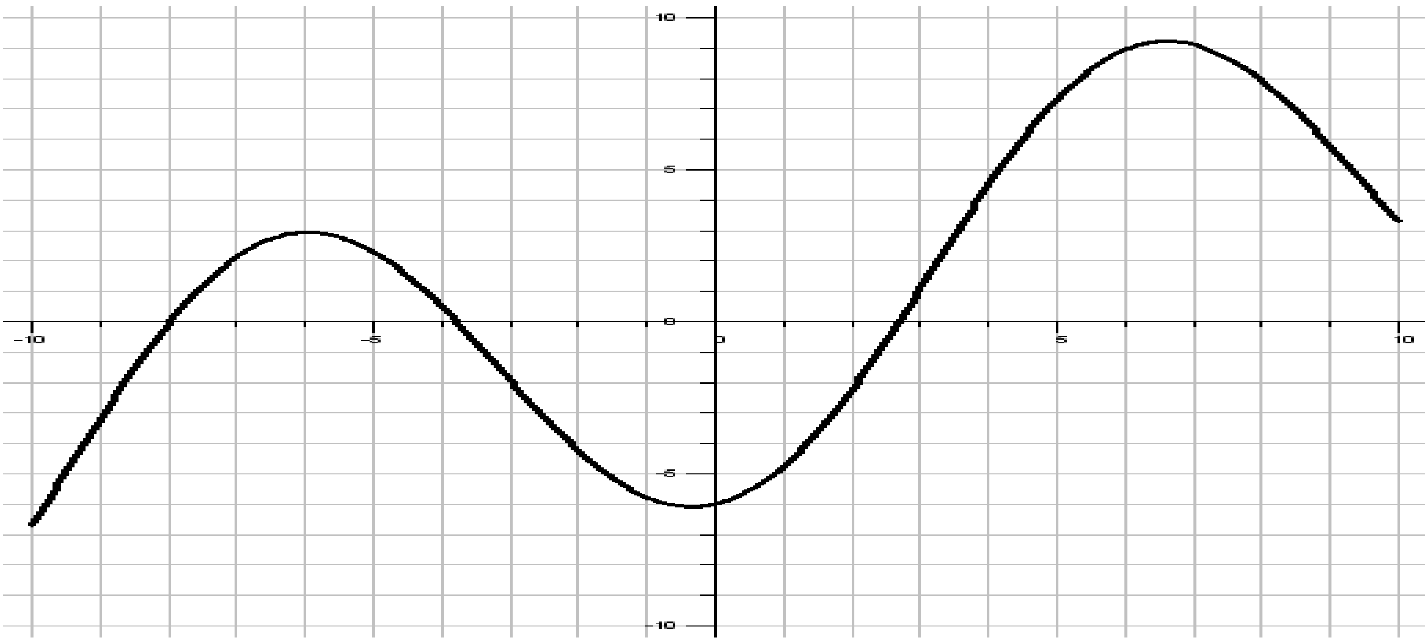
a) Pour lire l'image d'un réel il faut :

- Chercher ce réel sur l'axe des abscisses
- Tracer la parallèle à l'axe des ordonnées passant par cette abscisse
- Lire l'ordonnée du point d'intersection de la droite précédente avec la courbe.

b) Pour lire les antécédents d'un réel il faut :

- Chercher ce réel sur l'axe des ordonnées
- Tracer la parallèle à l'axe des abscisses passant par cette ordonnée
- Lire les abscisses des points d'intersection de la droite précédente avec la courbe.

Exemple : Soit f la fonction définie pour des nombres compris entre -10 et 10 et représentée par le graphe ci-dessous



1) Trouver l'image de 0 et de -6 par f.
L'image de 0 est – 6. *L'image de – 6 est 3.*

2) Trouver les antécédents de 0 , de 2 et de -9 par f
Les antécédents de 0 sont – 8 ; – 3,9 et 2,8.
Les antécédents de 2 sont – 7 ; – 4,9 et 3,2.
– 9 n'a pas d'antécédents par f.

3) Résoudre les équations : $f(x) = 0$; $f(x) = 2$ et $f(x) = -9$
Les solutions de f(x) = 0 sont – 8 ; – 3,9 et 2,8 S = { – 8 ; – 3,9 ; 2,8 }.
Les solutions de f(x) = 2 sont – 7 ; – 4,9 et 3,2. S = { – 7 ; – 4,9 ; 3,2 }.
L'équation f(x) = – 9 n'a pas de solution. S = ∅

IV. Parité d'une fonction

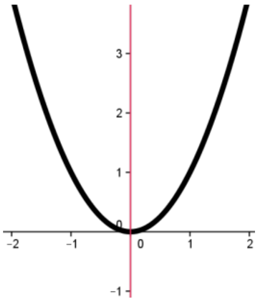
Propriété:

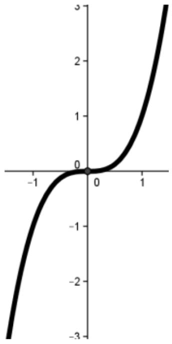
f est une fonction définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0.

Dans un plan muni d'un repère orthogonal:

¤ f est **paire** si et seulement si **l'axe des ordonnées est un axe de symétrie** de la courbe d'équation y =f(x)

¤ f est im**paire** si et seulement si **l'origine est un centre de symétrie** de la courbe d'équation y =f(x)

fonction paire: 

fonction impaire: 

V. Résolutions d'équations ou d'inéquations:

Méthode:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative .

¤ **Résoudre graphiquement f(x) = k:**

Les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersection entre C_f et la droite d'équation y =k

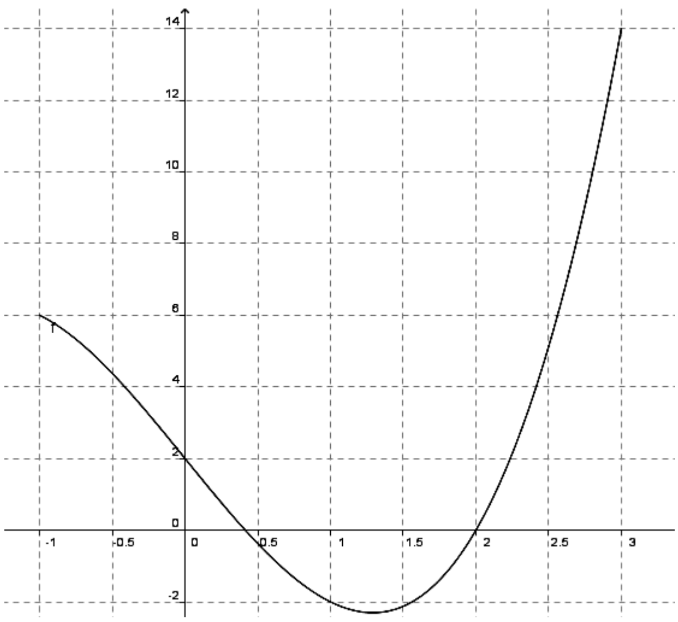
¤ **Résoudre graphiquement f(x) ≤ k:**

Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de C_f qui se situent sur ou en dessous de la droite d'équation y =k

¤ **Résoudre graphiquement f(x) >k:**

Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de C_f qui se situent au dessus de la droite d'équation y =k

Exemple : f est définie sur [– 1 ; 3] . Résoudre graphiquement :



1) $f(x) \leq 0$

Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de la courbe ayant une ordonnée inférieure ou égale à 0.

On lit : **S = [0,4 ; 2]**

2) f(x)=2:

Les solutions de l'équation sont les abscisses des points de la courbe ayant une ordonnée égale à 2.

On lit : **S = [0 ; 2,3]**

3) $f(x) > 4$

Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de la courbe ayant une ordonnée strictement supérieure à 8.

On lit : **S = [– 1 ; – 0,4 [∪] 2,4; 3]**

3) $f(x) > -1$

Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de la courbe ayant une ordonnée strictement supérieure à – 1.

On lit : **S = [– 1 ; 0,7 [∪] 1,7 ; 3]**

4) $f(x) < -4$

Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de la courbe ayant une ordonnée strictement inférieure à – 4.

On lit : **S = ∅**

Tableau de signes d'une fonction :

A partir de l'exemple du 1) on peut dire que : $f(x) > 0$ sur [– 1 ; 0, 4 [∪] 2 ; 3]
$f(x) < 0$ sur] 0,4 ; 2 [
$f(x) = 0$ pour $x = 0,4$; $x = 2$.

Ceci se résume dans un tableau de signes :

x	– 1		0,4		2		3
signe de $f(x)$		+	0	–	0	+	

VII. Variations d'une fonction numérique sur un intervalle:

Exemple :

Énoncé des variations d'une fonction ► *Voir Exercices 33 à 36*

Une fonction f est donnée par la courbe représentative ci-contre.
Cette fonction est définie sur [– 2 ; + ∞[.
Sur l'intervalle [– 2 ; 3] , la fonction f est croissante.
Sur l'intervalle [3 ; 6] , la fonction f est décroissante.
Sur l'intervalle [6 ; + ∞[, la fonction f est croissante.

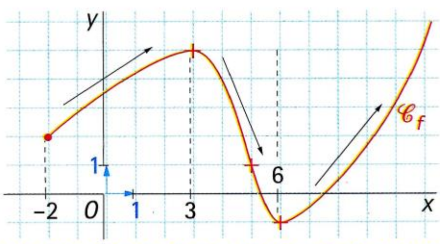


Tableau des variations d'une fonction ► *Voir Exercices 37 à 39*

On résume le sens de variation d'une fonction dans un tableau à double entrée qui se construit en trois étapes :

première étape

variable	x	
image par f	$f(x)$	

deuxième étape

x			
$f(x)$	↗	↘	↗

flèches de variation

troisième étape

x	– 2		3		6		+ ∞	abscisse
$f(x)$	2	↗	5	↘	– 1	↗		ordonnée

valeurs extrêmes et changement de sens

Sur l'intervalle de définition [– 2 ; + ∞[, le **minimum** est – 1 , atteint en 6 , mais la fonction n'a pas de maximum.

On dira que 5 est un maximum local . C'est le maximum de la fonction sur l'intervalle [–2 ; 11].