

TSpé DEVOIR SURVEILLE N°1(2h)

Calculatrice mode examen

Exercice 1 :

(3,5 points)

Entourer la bonne réponse .Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse n'enlève pas de point. L'absence de réponse n'est pas pénalisante. Aucune justification n'est attendue.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Dans $\mathbb{R}$, l'équation $5x^2 - 3x + 8 = 0$ a :	Aucune solution	Une solution	2 solutions
La fonction racine carrée est:	définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$	définie sur $[0 ; +\infty[$ et dérivable sur $]0 ; +\infty[$	définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$
f est une fonction définie sur les réels par $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 7)$. Alors $f'(x) =$	$9x^2 - 14x + 3$	$3x^2 - 14x - 3$	$9x^2 - 11x + 4$
h est une fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $h(x) = 4x^5 - 2x + \frac{3}{x}$. Alors $h'(x) =$	$20x^4 - 2 + \frac{3}{x^2}$	$20x^4 - 2 - \frac{3}{x^2}$	$16x^4 - 2 - \frac{3}{x^2}$
j est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $j(x) = x^2$. C_j est la courbe représentative de la fonction j dans un repère. L'équation de la tangente à C_j au point d'abscisse -1 est :	$y = -2x - 2$	$y = -2x + 1$	$y = -2x - 1$
g est une fonction définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x\sqrt{x}$. Alors $g'(x) =$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{3}{2}x\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$

Exercice 2 :

(7 points)

La fonction f est la fonction définie sur $[0 ; 6]$ par $f(x) = (10x - 5)e^{-x}$.

- 1) Dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; 6]$.
Préciser les extrémums et les valeurs aux bornes de l'intervalle de définition.
- 2) Etudier la convexité de f sur $[0 ; 6]$.
- 3) La courbe de f admet-elle un point d'inflexion sur $[0 ; 6]$? Si oui lequel? Justifier.
- 3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

Exercice 3 :

(6,5 points)

1. Soit g la fonction définie sur $I = [-3 ; 10]$ par $g(x) = 2x^3 + 12x^2 + 2$
 - a) Etudier les variations de g sur l'intervalle I .
 - b) En déduire le signe de $g(x)$ sur I .
2. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x + 4}$.
 - a) Justifier que f est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
 - b) En s'aidant de la question précédente, déduire le signe de $f'(x)$ sur I puis les variations de la fonction f .

Exercice 4 :

(3 points)

Simplifier les expressions suivantes.

$$A = \frac{e^{-5}}{e^{-3+2x}} \quad ; \quad B = e^{-9} \times e^{-2x+4} \times e^8 \quad ; \quad C = (e^{-4})^2 \times e^{3x+2} \times \frac{1}{e^{-6}}$$

Exercice 5 :

(5 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$1) e^{-3x+5} = e^{5x+4} \qquad 2) e^{x^2+2x-3} = 1$$

Exercice 6 :

(5 points)

Calculer la dérivée de chaque fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = 4x^2 + 2x + 1 - 3e^x \quad ; \quad g(x) = 2x^3 e^x \quad ; \quad h(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$$

CORRECTION

Exercice 1 :

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Dans $\mathbb{R}$, l'équation $5x^2 - 3x + 8 = 0$ $a : \Delta = 9 - 80 = -71 < 0$	Aucune solution	Une solution	2 solutions
La fonction racine carrée est:	définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$	Définie sur $[0 ; +\infty[$ et dérivable sur $]0 ; +\infty[$	définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$
f est une fonction définie sur les réels par $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 7)$. Alors $f'(x) =$ f est de la forme $u \times v$ $u'(x) = 2x$; $v'(x) = 3$	$9x^2 - 14x + 3$	$3x^2 - 14x - 3$	$9x^2 - 11x + 4$
h est une fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $h(x) = 4x^5 - 2x + \frac{3}{x}$. Alors $h'(x) =$	$20x^4 - 2 + \frac{3}{x^2}$	$20x^4 - 2 - \frac{3}{x^2}$	$16x^4 - 2 - \frac{3}{x^2}$
j est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $j(x) = x^2$. C_j est la courbe représentative de la fonction j dans un repère. L'équation de la tangente à C_j au point d'abscisse -1 est : $y = j'(-1)(x + 1) + j(-1)$ $j'(x) = 2x$ donc $j'(-1) = -2$ et $j(-1) = 1$	$y = -2x - 2$	$y = -2x + 1$	$y = -2x - 1$
g est une fonction définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x\sqrt{x}$. Alors $g'(x) =$ g est de la forme $u \times v$ $u'(x) = 1$; $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{3}{2} \times \sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$

Exercice 2 :

La fonction f est la fonction définie sur $[0 ; 6]$ par $f(x) = (10x - 5)e^{-x}$.

1) Dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; 6]$.

$$f'(x) = 10e^{-x} - (10x - 5)e^{-x} = e^{-x}(10 - 10x + 5) = e^{-x}(-10x + 15)$$

$$\text{Signe de } f'(x) : e^{-x} > 0 \text{ et } -10x + 15 \geq 0 \Leftrightarrow -10x \geq -15 \Leftrightarrow x \leq \frac{15}{10} \Leftrightarrow x \leq 1,5$$

x	0	1,5	6
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f	-5	$10e^{-1,5}$	$55e^{-6}$

2) Etudier la convexité de f sur $[0 ; 6]$.

$$f''(x) = -e^{-x}(-10x + 15) - 10e^{-x} = e^{-x}(10x - 15 - 10) = e^{-x}(10x - 25)$$

$$\text{Signe de } f''(x) : e^{-x} > 0 \text{ et } 10x - 25 \geq 0 \Leftrightarrow 10x \geq 25 \Leftrightarrow x \geq \frac{25}{10} \Leftrightarrow x \geq 2,5$$

Sur $[0 ; 2,5]$ f'' est négative donc f est concave .

Sur $[2,5 ; 6]$ f'' est positive donc f est convexe .

3) La dérivée seconde de f s'annule et change de signe en $x = 2,5$ donc la courbe présente un point d'inflexion d'abscisse 2,5 et d'ordonnée $f(2,5) = 20e^{-2,5}$.

4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

$$\text{Cette équation est } y = f'(0)(x - 0) + f(0) \text{ avec } f'(0) = 15e^0 = 15 \text{ et } f(0) = -5e^0 = -5$$

Donc l'équation de cette tangente est $y = 15x - 5$

Exercice 3 :

1. Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = 2x^3 + 12x^2 + 2$

Variations de g sur l'intervalle I : $g'(x) = 6x^2 + 24x = 6x(x+4)$ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -4$

x	-3	0	10
Signe de $g'(x)$ on utilise le signe du trinôme, signe de a à l'extérieur des racines	-	0	+
Variations de g	56 ↘	2	↗ 3202

Donc sur I , g admet un minimum qui est 4 donc $g(x) > 0$ (car $g(x) \geq 4$)

2. Soit f la fonction définie sur $I = [-1; 10]$ par $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x + 2}$

f est dérivable sur un intervalle où $x + 2$ ne s'annule pas. $x + 2 = 0$ pour $x = -2$

donc f est dérivable sur $I = [-1; 10]$ et $f'(x) = \frac{3x^2(x+4) - 1(x^3 - 2)}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 12x^2 + 2}{(x+2)^2} = \frac{g(x)}{(x+4)^2}$

3. En s'aidant de la question précédente, déduire le signe de $f'(x)$ sur I puis les variations de la fonction f

g est positive sur I et $(x+4)^2 > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x) > 0$ sur I donc f est strictement croissante sur I .

Exercice 4 :

$$A = \frac{e^{-5}}{e^{-3+2x}} = e^{-5+3-2x} = e^{-2x-2}$$

$$B = e^{-9} \times e^{-2x+4} \times e^8 = e^{-9-2x+4+8} = e^{-2x+3}$$

$$C = (e^{-4})^2 \times e^{3x+2} \times \frac{1}{e^{-6}} = e^{-8} \times e^{3x+2} \times e^6 = e^{-8+3x+2+6} = e^{3x}$$

Exercice 5 :

$$\# e^a = e^b \Leftrightarrow a=b \text{ donc } e^{-3x+5} = e^{5x+4} \Leftrightarrow -3x+5 = 5x+4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8} \quad S = \left\{ \frac{1}{8} \right\}$$

$$\# e^{x^2+2x-3} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2+2x-3} = e^0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 4}{2} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \quad S = \{-3; 1\}$$

Exercice 6 :

$$\# f(x) = 4x^2 + 2x + 1 - 3e^x \quad f'(x) = 8x + 2 - 3e^x$$

$$\# g(x) = 2x^3 e^x \quad g'(x) = 6x^2 e^x + 2x^3 e^x = 2x^2 e^x (x+3)$$

$$\# h(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1} \quad h'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - (e^x-2)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x)^2 + e^x - (e^x)^2 + 2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{3e^x}{(e^x+1)^2}$$