

Corrigé exercice 27 :

1. f est le produit des fonctions u et v définies par $u(x) = (x^2 + 3x + 2)^2$ et $v(x) = (2x^2 - 5x + 7)^3$.
Ces fonctions sont des polynômes donc sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, ainsi $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = x^2 + 3x + 2$ et $h(x) = x^2$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = 2x + 3$ et $h'(x) = 2x$. D'où $u'(x) = 2(2x + 3)(x^2 + 3x + 2)$.

De même, $v = q \circ p$ avec $p(x) = 2x^2 - 5x + 7$ et $q(x) = x^3$ donc $v' = p' \times q' \circ p$ avec $p'(x) = 4x - 5$ et $q'(x) = 3x^2$. D'où $v'(x) = 3(4x - 5)(2x^2 - 5x + 7)^2$.

Ainsi, après réduction et factorisation de l'expression, on obtient

$$f'(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x^2 - 5x + 7)^2(20x^3 + 13x^2 - 23x + 12).$$

2. f est le produit des fonctions u et v définies par $u(x) = (x^3 + 5x^2 + 4)^2$, dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme, et $v(x) = e^{x^4 - 8x^2}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = x^3 + 5x^2 + 4$ et $h(x) = x^2$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = 3x^2 + 10x$ et $h'(x) = 2x$.

D'où, $u'(x) = 2(3x^2 + 10x)(x^3 + 5x^2 + 4) = 2x(3x + 10)(x^3 + 5x^2 + 4)$.

De même, $v = q \circ p$ avec $p(x) = x^4 - 8x^2$ et $q(x) = e^x$ donc $v' = p' \times q' \circ p$ avec $p'(x) = 4x^3 - 16x$ et $q'(x) = e^x$. D'où $v'(x) = (4x^3 - 16x)e^{x^4 - 8x^2} = 4x(x^2 - 4)e^{x^4 - 8x^2}$.

Ainsi, après réduction et factorisation de l'expression, on obtient

$$f'(x) = 2x(x^3 + 5x^2 + 4)e^{x^4 - 8x^2}(2x^5 + 10x^4 - 8x^3 - 32x^2 + 3x - 22).$$

Corrigé exercice 29 :

1. f est le quotient des fonctions u et v définies par $u(x) = \sqrt{2x + 3}$ et $v(x) = x^2 - x + 4$. v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule pas sur I . u est dérivable lorsque $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$. D'où

$$\mathcal{D}_{f'} = \left] -\frac{3}{2}; +\infty \right[$$

De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = 2x + 3$ et $h(x) = \sqrt{x}$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = 2$ et $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\text{D'où } u'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x + 3}} = \frac{1}{\sqrt{2x + 3}}$$

et $v'(x) = 2x - 1$.

$$\text{D'où, } f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2x + 3}}(x^2 - x + 4) - \sqrt{2x + 3}(2x - 1)}{(x^2 - x + 4)^2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad f'(x) = \frac{-3x^2 - 5x + 7}{\sqrt{2x + 3}(x^2 - x + 4)^2}$$

2. f est le quotient des fonctions u et v définies par $u(x) = e^{-x^2+5x+4}$ et $v(x) = x + 7$. La fonction v est dérivable et ne s'annule pas sur I . La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur cet ensemble. D'où $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$.

De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = -x^2 + 5x + 4$ et $h(x) = e^x$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = -2x + 5$ et $h'(x) = e^x$.

D'où $u'(x) = (-2x + 5)e^{-x^2+5x+4}$ et $v'(x) = 1$.

$$\text{D'où, } f'(x) = \frac{(-2x + 5)e^{-x^2+5x+4}(x + 7) - e^{-x^2+5x+4} \times 1}{(x + 7)^2}, \text{ c'est-à-dire}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x^2+5x+4} [-2x^2 - 9x + 34]}{(x + 7)^2}.$$

Corrigé exercice 30 :

1. f est le quotient des fonctions u et v définies par $u(x) = (x^3 + 4)^5$ et $v(x) = (x^2 + 3x - 4)^3$. u et v sont dérivables sur I comme polynômes, et v ne s'annule pas sur cet ensemble. Donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$.

De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = x^3 + 4$ et $h(x) = x^5$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = 3x^2$ et $h'(x) = 5x^4$. D'où $u'(x) = 15x^2(x^3 + 4)^4$.

Et $v = q \circ p$ avec $p(x) = x^2 + 3x - 4$ et $q(x) = x^3$ donc $v' = p' \times q' \circ p$ avec $p'(x) = 2x + 3$ et $q'(x) = 3x^2$. D'où $v'(x) = 3(2x + 3)(x^2 + 3x - 4)^2$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$,

$$f'(x) = \frac{15x^2(x^3 + 4)^4(x^2 + 3x - 4)^3 - (x^3 + 4)^5 \times 3(2x + 3)(x^2 + 3x - 4)^2}{(x^2 + 3x - 4)^6}$$

$$f'(x) = \frac{3(x^3 + 4)^4 [3x^4 + 12x^3 - 20x^2 - 8x - 12]}{(x^2 + 3x - 4)^4}.$$

2. f est le quotient des fonctions u et v définies sur I par $u(x) = e^{2x^3+x^2-7x+2}$ et $v(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. v est dérivable lorsque $x^2 + x + 1 > 0$, ce qui est le cas pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = 2x^3 + x^2 - 7x + 2$ et $h(x) = e^x$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = 6x^2 + 2x - 7$ et $h'(x) = e^x$. D'où $u'(x) = (6x^2 + 2x - 7)e^{2x^3+x^2-7x+2}$.

Et $v = q \circ p$ avec $p(x) = x^2 + x + 1$ et $q(x) = \sqrt{x}$ donc $v' = p' \times q' \circ p$ avec $p'(x) = 2x + 1$ et $q'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. D'où $v'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$,

$$f'(x) = \frac{(6x^2 + 2x - 7)e^{2x^3+x^2-7x+2}\sqrt{x^2 + x + 1} - e^{2x^3+x^2-7x+2} \times \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}}{(\sqrt{x^2 + x + 1})^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x^3+x^2-7x+2} [12x^4 + 16x^3 + 2x^2 - 12x - 15]}{2(\sqrt{x^2 + x + 1})^3}.$$