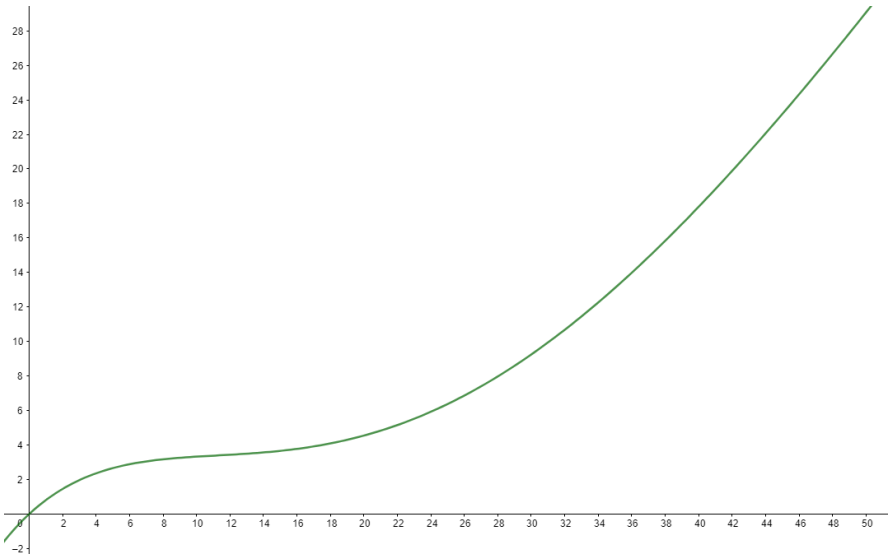
Corrigé exercice 89 :

1.

a. La fonction C semble strictement croissante sur $[0;50]$.



b. La fonction C est dérivable sur $[0;50]$ comme somme, composée et produit de polynômes et de la fonction exponentielle toutes dérivables sur $[0;50]$.

Pour tout $x \in [0;50]$, $C'(x) = -\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-0,05x}\left(-0,05x^2+1,95x+1\right)+1$.

De même, la fonction C' est dérivable sur $[0;50]$. Et, pour tout $x \in [0;50]$,
$C''(x) = -\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-0,05x}\left(0,0025x^2-0,1975x+1,9\right)$.

c. Or, pour tout réel $x \in [0;50]$, $-\frac{1}{10} < 0$ et $\mathrm{e}^{-0,05x} > 0$
donc $C''(x)$ est du signe contraire de $0,0025x^2-0,1975x+1,9$.
Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = (-0,1975)^2 - 4\times 0,0025\times 1,9 = 0,02000625$.
Comme $\Delta > 0$, le polynôme $0,0025x^2-0,1975x+1,9$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-0,1975)-\sqrt{0,02000625}}{2\times 0,0025} \approx 11,21$$

Et

$$x_2 = \frac{-(-0,1975)+\sqrt{0,02000625}}{2\times 0,0025} = \approx 67,79$$

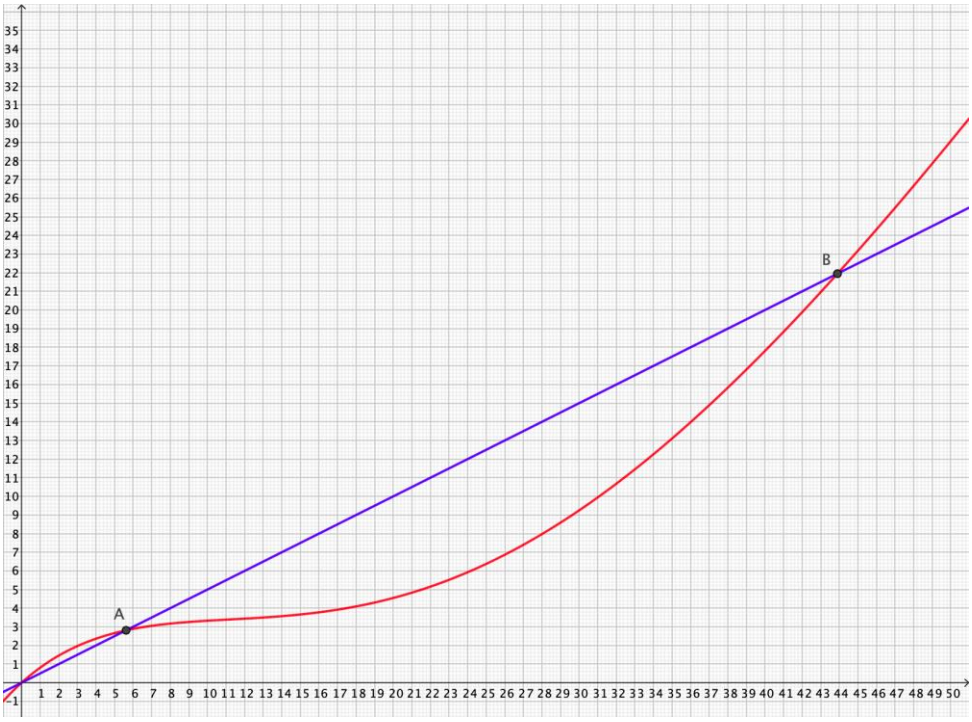
Ainsi C'' est négative sur $[0;11,21]$ et positive sur $[11,21;50]$.
On en déduit que C' est décroissante sur $[0;11,21]$ et croissante sur $[11,21;50]$.

d. On déduit des variations de C' que C est concave sur $[0;11,21]$ et convexe sur $[11,21;50]$.
Ainsi, le coût marginal est croissant sur $[0;11,21]$ et décroissant sur $[11,21;50]$.

2.

a. Pour tout réel $x \in [0;50]$, la recette générée par la vente de x dizaines d'objets est $50x$ euros, soit $0,5x$ centaines d'euros. Ainsi, on a $R(x) = 0,5x$.

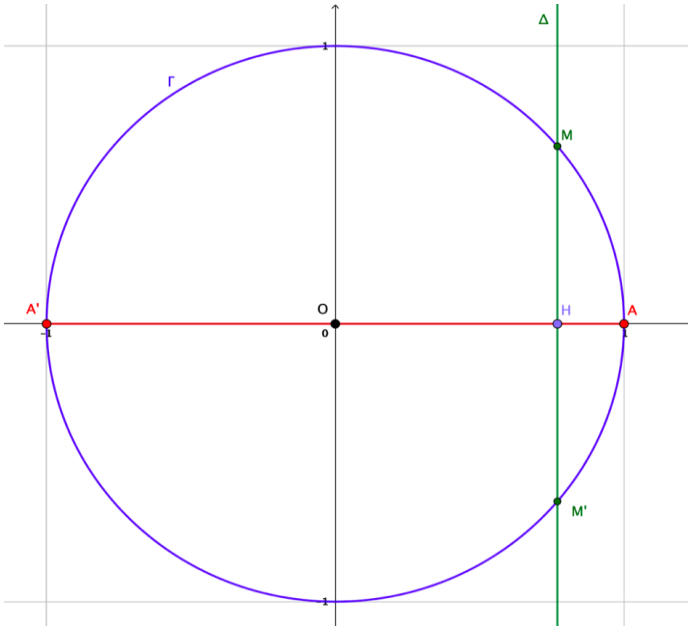
b. On obtient les courbes ci-dessous.



c. L'entreprise réalise un bénéfice lorsque ses recettes sont supérieures à ses dépenses, soit entre 56 et 439 objets produits.

Corrigé exercice 90 :

1. On obtient la figure suivante.



2. L'aire du triangle AMM' est égale à $\frac{1}{2} \times AH \times MM'$.
Or, $AH = OA - OH = 1 - x$.
Comme une équation du cercle Γ est $x^2 + y^2 = 1$, les coordonnées du point M sont $\left(x; \sqrt{1-x^2}\right)$ et les coordonnées du point M' sont $\left(x; -\sqrt{1-x^2}\right)$.
D'où $MM' = 2\sqrt{1-x^2}$.
Donc l'aire du triangle AMM' est égale à $(1-x)\sqrt{1-x^2}$.

3.

a. f est dérivable sur $]-1;1[$ comme produit de fonctions dérivables sur $x \in]-1;1[$.

Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -1 \times \sqrt{1-x^2} + \dfrac{-x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Or, pour tout réel $x \in]-1;1[$, $\sqrt{1-x^2} > 0$.
Donc $f'(x)$ est du même signe que $2x^2-x-1$.

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$.
Comme $\Delta > 0$, le polynôme $2x^2-x-1$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times 2} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times 2} = \frac{4}{4} = 1.$$

Or, le polynôme $2x^2-x-1$ est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur.
Ainsi, $2x^2-x-1$ est positif sur $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ et négatif sur $\left]-\frac{1}{2};1\right[$.

D'où f' est positive sur $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ et négative sur $\left]-\frac{1}{2};1\right[$.

Donc f est croissante sur $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ et décroissante sur $\left]-\frac{1}{2};1\right[$.

b. La fonction f admet un maximum en $x = -\frac{1}{2}$.

Ainsi, l'aire du triangle AMM' est maximale lorsque l'abscisse du point H est $-\frac{1}{2}$.

c. Si $x = -\frac{1}{2}$, les coordonnées du point M sont $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et les coordonnées du point M' sont $\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

On a $MM' = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$,

$$AM = \sqrt{\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

et

$$AM' = \sqrt{\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(0-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{3}.$$

Ainsi, comme $AM = AM' = MM'$, on en déduit que le triangle AMM' est équilatéral.