Chapitre 1 **Ensembles de nombres- Intervalles- Arithmétique**

I. Les ensembles de nombres

a) Les entiers naturels : Les entiers naturels sont les entiers positifs et 0.

Par exemple, 0, 1, 2 et 5676 sont des entiers naturels. Par contre – 45 n'en est pas un.
Il existe une infinité d'entiers naturels. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

b) Les entiers relatifs : Ce sont des entiers naturels précédés ou non du signe " - ".

L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$. -3 et 3 sont des entiers relatifs opposés.

c) Les nombres décimaux : Un nombre décimal est un nombre dit « à virgule », c'est le quotient (ou le produit) d'un entier relatif par une puissance de 10.

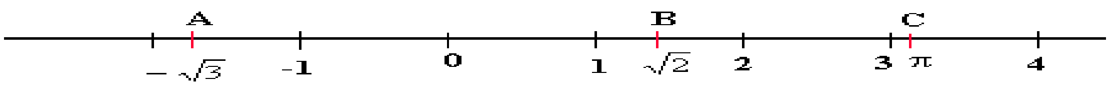
Il est de la forme $\frac{a}{10}$ ou $a \times 10$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

d) Les nombres rationnels : Un nombre rationnel est le quotient de deux entiers relatifs.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$

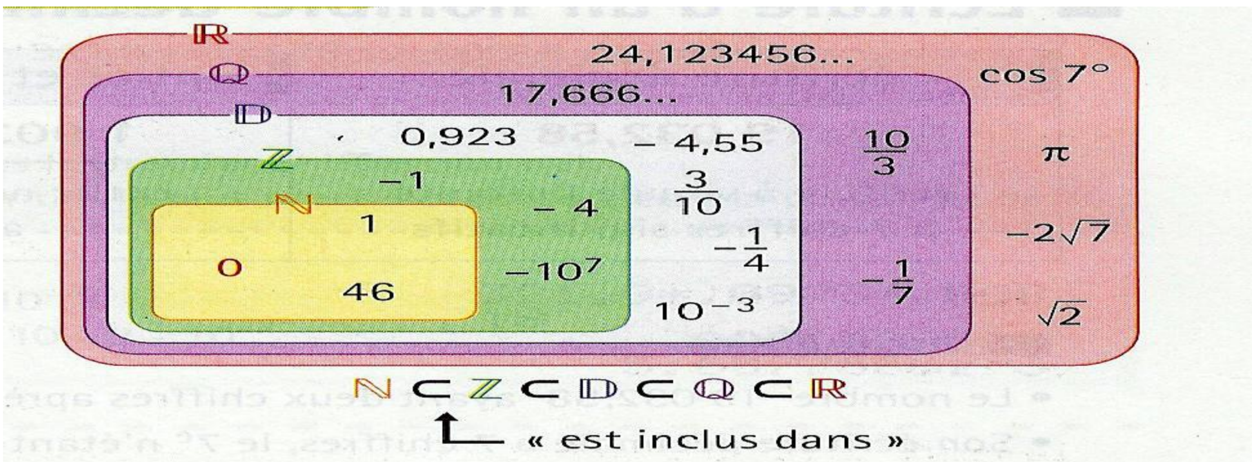
e) Les nombres réels : L'ensemble des **nombres réels** est l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée appelée droite numérique. Il est noté $\mathbb{R}$



Sur ce dessin, le point A a pour abscisse $-\sqrt{3}$ alors que les nombres réels positifs $\sqrt{2}$ et π sont les abscisses des points B et C, on note $A(-\sqrt{3})$ $B(\sqrt{2})$ *et* $C(\pi)$

Remarque : Certains nombres réels, par exemple, $\sqrt{3}, \pi$ ou cos (7°), ne peuvent pas s'écrire comme le quotient de deux entiers relatifs : ce sont des nombres **irrationnels**

A RETENIR :



Exemples:

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$-\frac{7}{2} = -3{,}5$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$4{,}5\times10^6 = 4\,500\,000$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$-\sqrt{81} = -9$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$2\pi+1$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\sqrt{3}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\frac{5}{3}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\frac{30}{3} = 10$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$(-3)^3 = -27$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$

¤

Utilisation du symbole $\in$ ou $\notin$:

$-12 \in \mathbb{Z}$; $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$; $(-2)^2 \in \mathbb{D}$; $\sqrt{5} \notin \mathbb{N}$

II. Arithmétique :

Définition : Soit a et b deux entiers relatifs.
On dit que b est un **multiple** de a, ou que a est un **diviseur** de b s'il existe un entier relatif k tel que b=k×a.

Exemples : *36 est un multiple de 12, puisque 36=3×12.*
15 est un diviseur de 45 car 45 = 3 ×15

Proposition : Si m et n sont deux multiples de a, alors m + n est un multiple de a.

Démonstration :

m multiple de a $\Leftrightarrow$ il existe un entier relatif k tel que $m = k \times a$
n multiple de a $\Leftrightarrow$ il existe un entier relatif k' tel que $n = k' \times a$

Calcul de m + n :
$m + n = k \times a + k' \times a = a\,(k + k')$
donc m + n est un multiple de a

Définitions :

- Un nombre entier est **pair** s'il est divisible par 2. Il s'écrit donc $n = 2k$, avec k un entier.
- Un nombre entier est **impair** s'il n'est pas divisible par 2. Il s'écrit alors $n = 2k + 1$, avec k un entier.

<u>Propositions</u> : ¤ Soit n un entier. n^2 est pair si et seulement si alors n est pair.

¤ Soit n un entier. n^2 est impair si et seulement si alors n est impair.

Démonstration :

¤ *si n est pair alors n=2k. D'où* $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2k^2 \times 2$.

Donc n^2 est pair (c'est un multiple de 2)

¤ *si n est impair alors n=2k+1. D'où* $n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2\times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1$.

Donc n^2 est impair [il est de la forme $2(2k^2+2k)+1$]

<u>Définition</u> : Un nombre entier relatif n est **premier** s'il est différent de 1 et admet exactement deux diviseurs positifs, 1 et lui-même.

Exemples : 7 est un nombre premier mais 15 ne l'est pas, car ses diviseurs positifs sont 1,3 et 5.

<u>Propriété</u> : Soit n un entier naturel. Si n n'est pas un entier premier alors il existe au moins un entier premier p diviseur de n tel que p soit compris entre 2 et $\sqrt{n}$

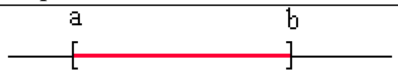
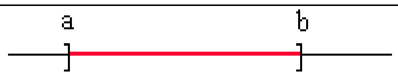
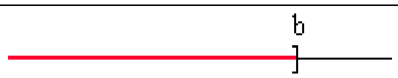
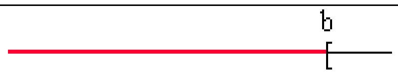
Exemple : *39 n'est pas un nombre premier :* $\sqrt{39} \approx 6{,}2$

39 admet au moins un diviseur inférieur ou égal à 6 : $39 = 3\times 13$

II. Les intervalles

Les intervalles réels sont des parties de $\mathbb{R}$

Dans le tableau ci-dessous, a et b sont deux réels tels que $a \le b$.

Notation	*Représentation sur la droite réelle*	Ensemble des réels x tels que
$[\,a\,;b\,]$		$a \le x \le b$
$[\,a\,;b\,[$		$a \le x < b$
$]\,a\,;b\,]$		$a < x \le b$
$]\,a\,;b\,[$		$a < x < b$
$]-\infty\,;b\,]$		$x \le b$
$]-\infty\,;b\,[$		$x < b$
$[\,a\,;+\infty\,[$		$a \le x$
$]\,a\,;+\infty\,[$		$a < x$

Remarques :

Le fait de dire qu'un intervalle est ouvert en b signifie que le réel b ne fait pas partie de celui-ci.
Par contre, s'il y avait été fermé alors il en aurait fait partie.
Les deux réels qui délimitent un intervalle sont appelés bornes de l'intervalle.
La notation $+\infty$ se lit "plus l'infini". Les intervalles sont toujours ouverts du côté de $-\infty$ ou $+\infty$.
$\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$
Si un intervalle est réduit à un seul nombre réel a on le note $\{ a \}$. L'ensemble vide se note $\varnothing$.

Réunion et intersection d'intervalles :

On note $I \cap J$ l'intersection des deux intervalles I et J.
Elle contient tous les nombres réels qui sont à la fois dans I et dans J.

On note $I \cup J$ la réunion des deux intervalles I et J.
Elle contient tous les nombres réels qui sont soit dans I soit dans J.

Exemple : $I =]-\infty ; 5]$ et $J =]-2 ; 18[$ $\quad I \cap J =]-2 ; 5]$ et $I \cup J =]-\infty ; 18[$.

Exercice 1:
Compléter le tableau suivant (les réponses seront données, si possible, sous forme d'un intervalle)

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$
$]-\infty ; 4]$	$]3 ; 10]$	$]3 ; 4]$	$]-\infty ; 10]$
$]-\infty ; 4]$	$]4 ; 9]$	$\varnothing$	$]-\infty ; 9]$
$]-8 ; -4]$	$[-6 ; 4]$	$[-6 ; -4]$	$]-8; 4]$
$]-5 ; +\infty[$	$[-10 ; 8]$	$]-5 ; 8]$	$[-10 ; +\infty[$
$]-\infty ; 15]$	$[7 ; +\infty[$	$[7 ; 15]$	IR

1) $2x - 1 \leq 2$

$2x \leq 3$

$x \leq \dfrac{3}{2}$

$S =]-\infty ; \dfrac{3}{2}]$

2) $2 - x \geq 5$

$-x \geq 3$

$x \leq -3$

$S =]-\infty ; -3]$

3) $4x + 7 > 9$

$4x > 2$

$x > \dfrac{2}{4}$

$x > \dfrac{1}{2}$

$S =]\dfrac{1}{2} ; +\infty[$

4) $x - 7 < 3x + 3$

$x - 3x < 10$

$-2x < 10$

$x > -5$

$S =]-5 ; +\infty[$