Nom :...............................**Prénom :**........................ **Mardi 25 mars 2025**

TSpé DEVOIR SURVEILLE N°6

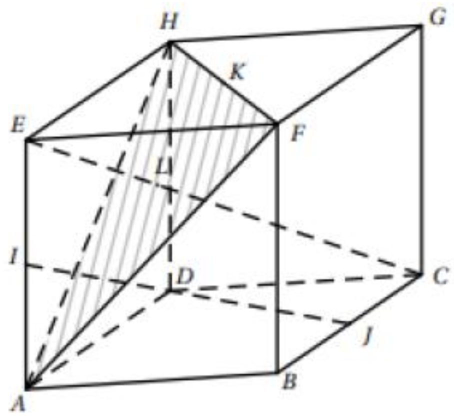
/ 40

Exercice 1 :

Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Entourer **la** bonne réponse. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

Les questions 1 à 3 se rapportent à la figure ci-contre où :

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.
On appelle $\mathcal{P}$ le plan (AFH).
Le point I est le milieu du segment $[AE]$,
Le point J est le milieu du segment $[BC]$,
Le point K est le milieu du segment $[HF]$,
Le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan P.



Question 1 :

1) Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.
2) Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
3) Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.
4) Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.

Question 2 :

1) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à 0
2) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à -1
3) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à 1
4) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à 2

Question 3 :

Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$:

1) Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x + y + z - 1 = 0$
2) Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x - y + z = 0$
3) Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $-x + y + z = 0$
4) Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x + y - z = 0$

Question 4 :

On considère l'inéquation $\ln(x) + \ln(2) \geq \ln(3x - 6)$ d'inconnue x réelle. L'ensemble des solutions est :

1) $]\,2\,;6\,]$ 2) $[\,6\,;\,+\infty\,[$ 3) $]\,0\,;6\,]$ 4) $]\,0\,;4\,]$

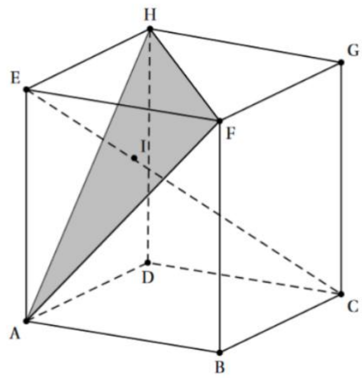
Question 5 :

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2};5\right[$ par $f(x) = -x + 2 + \ln(x+1)$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

$\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point :

1) $A\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2} + \ln(2)\right)$ 2) $B(0;2)$ 3) $C\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2} + \ln(2)\right)$ 4) $D(0;e^{-2} - 1)$

Exercice 2 :



On considère un cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1.

On se place dans le repère $\left(D\,;\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DH}\right)$

1. Dans ce repère, donner les coordonnées des sommets du cube.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC)

3.a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FH}$

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (AFH)

c. En déduire une équation cartésienne du plan (AFH)

4.a. Justifier que la droite (EC) et le plan (AFH) sont sécants.

b. Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

c. Montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH)

5. Soit J le milieu du segment $[GB]$. Déterminer la distance du point J à la droite (HB)

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$$

Dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$, on nomme $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

Partie A : Etude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition

2. Etudier les variations de la fonction f.

Partie B : On se propose de déterminer les tangentes à la courbe C_f passant par le point O.

1. Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$$

a. Déterminer les limites de la fonction u aux bornes de son domaine de définition

b. Etudier les variations de la fonction u

c. Montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$

2. a. Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$. Démontrer que la tangente $\mathcal{T}_a$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si, et seulement si, $f(a) - af'(a) = 0$

b. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par

$$g(x) = f(x) - xf'(x)$$

Montrer que, sur $]1;+\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.

c. En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe $\mathcal{C}_f$ passant par le point O

Correction Exercice 1 :

Question 1 : Réponse 2

M1 : Par l'absurde, si (IJ) et (EC) étaient coplanaires, alors le point J appartiendrait au plan (ECI), c'est-à-dire au plan (ECA), ce qui est faux.

M2 : En introduisant le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\,\right)$, on trouve rapidement

D'une part que $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et que $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1\\0,5\\-0,5\end{pmatrix}$, donc les droites (EC) et (IJ) ne sont pas parallèles.

Et d'autre part, qu'une représentation paramétrique de la droite (EC) est : $(EC) : \begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et qu'une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $(IJ) : \begin{cases}x=t\\y=0,5t\\z=0,5-0,5t\end{cases}$

Or $M(x;y;z)\in(IJ)\cap(EC)\Leftrightarrow\exists(t;k)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\begin{cases}t=k\\t=0,5k\\1-t=0,5-0,5k\end{cases}$

Le système est incompatible. Donc les droites (IJ) et (EC) n'ont pas de point commun. Puisqu'elles ne sont pas parallèles, alors elles ne sont pas coplanaires.

Question 2 : Réponse 3

En introduisant à nouveau le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\,\right)$, on a $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AF}\,.\,\overrightarrow{BG}=1\times0+0\times1+1\times1=1$

Question 3 : Réponse 4

$A\in\mathcal{P}\Rightarrow$ proposition 1 éliminée

$F\in\mathcal{P}\Rightarrow$ proposition 2 éliminée

$H\in\mathcal{P}\Rightarrow$ proposition 3 éliminée

Question 4 : Réponse 1

M1 : le plus simple est de lire graphiquement les solutions sur sa calculatrice graphique

M2 : On résout l'inéquation

L'inéquation est définie ssi $\begin{cases}x>0\\3x-6>0\end{cases}$ ssi $\begin{cases}x>0\\x>2\end{cases}$

$\forall x>2, \ln(x)+\ln(2)\geq\ln(3x-6)\Leftrightarrow\ln(2x)\geq\ln(3x-6)\Leftrightarrow 2x\geq3x-6\Leftrightarrow6\geq x$

$S=]\,2\,;6\,]$

Question 5 : Réponse 2

$\forall \boldsymbol{x}\in\left]-\frac{1}{2};5\right[\,,f'(x)=-1+\frac{1}{x+1}=\frac{-x}{x+1}$

$\forall \boldsymbol{x}\in\left]-\frac{1}{2};5\right[\,,f'(x)=0\Leftrightarrow -x=0\Leftrightarrow x=0$

Et enfin, $f(0)=-0+2+\ln(0+1)=2$

Correction Exercice 2

1. On a $A(1;0;0)$ $B(1;1;0)$ $C(0;1;0)$ $D(0;0;0)$

$E(1;0;1)$ $F(1;1;1)$ $G(0;1;1)$ $H(0;0;1)$

2. On a $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\0-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de la droite (EC) est $(EC):\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=1-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$

3.a. On a $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1-1\\1-0\\1-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}0-1\\0-1\\1-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

3.b. D'une part, les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FH}$ ne sont pas colinéaires (car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles)

D'autre part, $\vec{n}.\overrightarrow{AF}=1\times 0+(-1)\times 1+1\times 1=0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{FH}=1\times(-1)+(-1)\times(-1)+1\times 0=0$

Donc le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (AFH)

3.c. Puisque $\vec{n}$ est normal au plan (AFH), alors une équation cartésienne du plan (AFH) est :

$x-y+z+d=0.$

Or $A\in(AFH)\Rightarrow x_A-y_A+z_A+d=0\Rightarrow d=-1$

Donc $(AFH): x-y+z-1=0$

4. a. **M1 :** on remarque que $\vec{n}=-\overrightarrow{EC}$ et puisque selon la question 3.b. , $\overrightarrow{EC}$ est normal au plan (AFH) alors, la droite (EC) est orthogonale au plan (AFH) et enfin la droite (EC) et le plan (AFH) sont sécants.

M2 : On a $\overrightarrow{EC}.\vec{n}=-1\times 1+1\times(-1)+1\times(-1)=-3\neq 0$, donc la droite (EC) n'est pas parallèle au plan (AFH) , donc la droite (EC) et le plan (AFH) sont sécants.

4.b.

$$I(x;y;z)\in(EC)\cap(AFH)\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=1-t\\x-y+z-1=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=1-t\\1-t-t+1-t-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=1-t\\t=\frac{1}{3}\end{cases}\quad\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\y=\frac{1}{3}\\z=\frac{2}{3}\\t=\frac{1}{3}\end{cases}$$

Donc $I\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

4.c. Suite de M1 : Puisque la droite (EC) est orthogonale au plan (AFH) selon la question 4.a et puisque I est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH), alors par définition du projeté orthogonal d'un point sur un plan, I est bien le projeté du point E sur le plan (AFH)

Suite de M2 : Pour montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH), et puisque I est un point du plan (AFH), il suffit de montrer que $\overrightarrow{EI}$ est un vecteur normal au plan.

On a $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et on remarque que : $\overrightarrow{EI} = -\frac{1}{3}\vec{n}$.

Donc, le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

5. Remarquons que $J\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$ et appelons K le projeté orthogonal du point J sur la droite (HB).

Puisque $K(x_K;y_K,z_K) \in (HB)$ dont une représentation paramétrique est $(HB) : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, alors il

existe t réel tel que $\begin{cases} x_K = t \\ y_K = t \\ z_K = 1-t \end{cases}$

De plus, $\overrightarrow{KJ}.\overrightarrow{HB} = 0$, donc $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-t\\ 1-t\\ \frac{1}{2}-(1-t)\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$

donc $\left(\frac{1}{2}-t\right) \times 1 + (1-t) \times 1 + (-1) \times \left(-\frac{1}{2}+t\right) = 0$

donc $t = \frac{2}{3}$

Et par suite $K\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$

Enfin, $JK = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Donc la distance du point J à la droite (HB) est $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Correction Exercice 3 :

Partie A :

1.

- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\ln x} = +\infty\end{array}\right\}$ par somme, $\lim\limits_{x\to 1} \ln x - \frac{1}{\ln x} = -\infty$

- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0\end{array}\right\}$ par somme, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x - \frac{1}{\ln x} = +\infty$

2. $\forall x > 1, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - \left(-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x(\ln x)^2}$

Comme, pour tout x strictement supérieur à 1, $\frac{1}{x} > 0$ et $(\ln x)^2 > 0$, alors $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$

Partie B :

1.a $\lim\limits_{t\to-\infty} t^3 - t^2 - t - 1 = \lim\limits_{t\to-\infty} t^3 = -\infty$

et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^3 - t^2 - t - 1 = \lim\limits_{t\to+\infty} t^3 = +\infty$

1.b. $\forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) = 3t^2 - 2t - 1$

On a $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 = 4^2$ donc les racines de u sont $t_1 = \frac{2-4}{2\times3} = -\frac{1}{3}$ et $t_2 = \frac{2+4}{2\times3} = 1$

On obtient le tableau suivant :

t	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{22}{7}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

car $u\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{22}{7}$ et $u(1) = 1 - 1 - 1 - 1 = -2$

D'après le tableau de variation, $u(t) < 0$ sur $]-\infty\,;1]$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [1;+\infty[\text{ (car dérivable)} \\ f \text{ est strictement croissante sur } [1;+\infty[\\ 0 \text{ est compris entre } f(1) = -2 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{D'après le corollaire du TVI, il existe un unique}$$

$\beta \in [1;+\infty[$ solution de l'équation $u(t) = 0$

Et puisque d'après le tableau de variation, $u(t) < 0$ sur $]-\infty\,;1]$, il en est donc de même sur $\mathbb{R}$.

2.a. L'équation de la tangente $\mathcal{T}_a$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Or $O(0;0) \in \mathcal{T}_a \Leftrightarrow 0 = f(a) + f'(a)(0 - a) \Leftrightarrow 0 = f(a) - af'(a)$

2.b. Soit $x > 1$, alors $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{\ln x} - x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x(\ln x)^2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{\ln x} - 1 + \frac{1}{(\ln x)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 + 1 = 0 \quad \#\text{car } (\ln x)^2 \neq 0$$

Cela prouve bien que les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 + 1 = 0$ ont bien les mêmes solutions.

2.c. La tangente $\mathcal{T}_a$ à $\mathcal{C}_f$ passe par l'origine du repère si, et seulement si $g(a) = 0$ avec $a > 1$, ce qui équivaut à $u(\ln a) = 0$, avec $\ln a > 0$. Or selon la question 1.b, il existe un unique $\beta \in [1;+\infty[$ tel que $u(\beta) = 0$.

Donc il existe un unique a vérifiant $u(\ln a) = 0$ (et qui vaut $a = e^{\beta}$).

Il y a bien une unique tangente à C_f passant par l'origine du repère.