Nom, Prénom :…………………………………………………..… **Mardi 10 Décembre 2024**

TSpé DEVOIR SURVEILLE N°4

/40

2 points de bonus

Exercice 1 QCM (7 points)

Pour chaque question, entourer **la** bonne réponse, sans justifier.

Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
X suit la loi binomiale de paramètres n = 50 et p. On a : E(X) = 12. $p = \cdots$	0,36	0,75	0,12	0,24
Dans un arbre pondéré représentant un schéma de Bernoulli avec 8 répétitions, le nombre de chemins avec 6 succès est égal à :	$\binom{6}{8}$	$\binom{14}{7}$	$\binom{8}{6}$	$\binom{14}{6}$
X suit la loi binomiale de paramètres n = 6 et p = 0,4. $P(X=4)=\ldots$	$\binom{6}{4}\times 0{,}4^4\times 0{,}6^2$	0,6	$\binom{6}{4}\times 0{,}6^4\times 0{,}4^2$	$\binom{4}{6}\times 0{,}4^4\times 0{,}6^2$
X suit la loi binomiale de paramètres n = 3 et p = 0,2. $P(X=3)=\ldots$	$\left(\frac{1}{5}\right)^2$	$\left(\frac{4}{5}\right)^3$	$P(X=0)$	$1-P(X\leq 2)$
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}(1-x)$ Alors, sur $\mathbb{R}$, $f'(x)=$	$(x+2)e^{-x}$	$(x-2)e^{-x}$	$-x\,e^{-x}$	$(2-x)e^{-x}$
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2x-x^2$	g est concave sur $\mathbb{R}$	g est convexe sur $\mathbb{R}$	g admet un minimum en 1	Dans un repère, la courbe de g admet un point d'inflexion.
X suit la loi binomiale de paramètres n = 20 et p = 0,4. La plus petite valeur de a telle que $P(X\leq a)\geq 0{,}95$ est	12	15	11	13

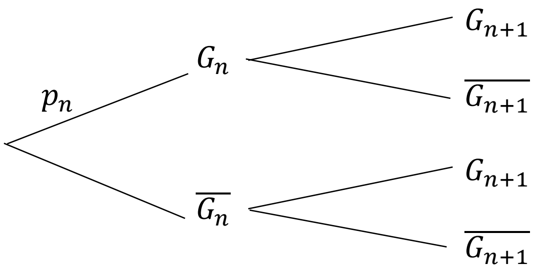
Exercice 2 : *(14,5 points)*

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- le joueur gagne la première partie
- s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,8
- s'il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,6

Pour tout entier naturel *n* non nul, on considère l'événement :
G_n : « le joueur gagne la n-ième partie ».
On note p_n la probabilité de G_n. On a donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout entier naturel *n* non nul : $p_{n+1} = 0{,}2\, p_n + 0{,}6$.

3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n* non nul : $p_n > 0{,}75$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel *n* non nul : $p_{n+1} - p_n < 0$

c. Justifier que la suite (p_n) est convergente.

4. Pour tout entier naturel *n* non nul, on pose $u_n = p_n - 0{,}75$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

b. Exprimer u_n en fonction de *n*, puis en déduire que $p_n = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{n-1}$.

c. Calculer la limite de la suite (p_n).

5. On considère le script suivant, écrit en langage Python, définissant une fonction `seuil` :

```
def seuil(e):
  p=1
  n=1
  while p - 0.75 >= e:
    p = 0.2*p + 0.6
    n=n+1
  return n
```

On veut trouver le plus petit entier naturel *n* tel que $p_n - 0{,}75 < 10^{-7}$.

Par quelle valeur doit-on remplacer le paramètre `e` pour que l'exécution de `seuil(e)` renvoie la valeur de *n* recherchée ? Donner alors cette valeur de *n*.

Exercice 3 *(10,5 points)*

Une concession automobile vend deux sortes de véhicules :

- 60 % sont des véhicules tout-électrique ;
- 40 % sont des véhicules hybrides rechargeables.

75 % des acheteurs de véhicules tout-électrique et 52 % des acheteurs de véhicules hybrides ont la possibilité matérielle d'installer une borne de recharge à domicile.

On choisit un acheteur au hasard et on considère les évènements suivants :
• E : « l'acheteur choisit un véhicule tout-électrique » ;
• B : « l'acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile ».

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième si nécessaire.

1. Calculer la probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile. *On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.*
2. Démontrer que P(B) = 0,658.
3. Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique ?
4. On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.
   a. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X. *On justifiera soigneusement la réponse.*
   b. Calculer P(X = 8).
   c. Calculer la probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge.
   d. Calculer l'espérance de X et l'interpréter.
   e. La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1 200 €. En moyenne, quelle somme doit-elle prévoir d'engager pour cette offre lors de la vente de 20 véhicules ? *Justifier la réponse.*

Exercice 4 *(10 points)*

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0{,}5$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$.

1. Soit la fonction f définie sur [0 ; +∞ [par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

   On admet que f est dérivable sur [0 ; +∞ [et on note f' sa dérivée.

   a. Montrer que, pour tout réel *x* de [0 ; +∞ [, $f'(x) = \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$
   b. En déduire les variations de f sur [0 ; +∞ [.
2. On remarquera que, pour tout entier naturel *n* , $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n* , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
   b. En déduire que la suite (u_n) converge et donner un encadrement de sa limite ℓ.
   c. On admet que $f(\ell) = \ell$. Déterminer ℓ.

Corrigé

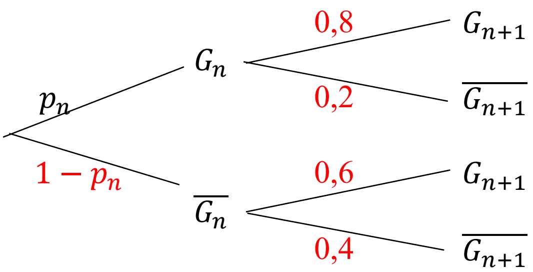
Exercice 1 QCM (7 points)

Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50\,;p)$ et E(X) = 12. $p = \cdots$	0,36	0,75	0,12	$\boxed{0{,}24}$
Dans un arbre pondéré représentant un schéma de Bernoulli avec 8 répétitions, le nombre de chemins avec 6 succès est égal à :	$\binom{6}{8}$	$\binom{14}{7}$	$\boxed{\binom{8}{6}}$	$\binom{14}{6}$
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(6\,;\ 0{,}4)$. $P(X=4) = \ldots$	$\binom{6}{4} \times 0{,}4^4 \times 0{,}6^2$	0,6	$\binom{6}{4} \times 0{,}6^4 \times 0{,}4^2$	$\boxed{\binom{4}{6} \times 0{,}4^4 \times 0{,}6^2}$
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3\,;0{,}2)$. $P(X=3) = \ldots$	$\left(\frac{1}{5}\right)^2$	$\left(\frac{4}{5}\right)^3$	$\boxed{P(X=0)}$	$1 - P(X \leq 2)$
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}(1-x)$ Alors, sur $\mathbb{R}$, $f'(x) =$	$\boxed{(x+2)e^{-x}}$	$(x-2)e^{-x}$	$-x\,e^{-x}$	$(2-x)e^{-x}$
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - x^2$	$\boxed{\text{g est concave sur } \mathbb{R}}$	g est convexe sur $\mathbb{R}$	g admet un minimum en 1	Dans un repère, la courbe de g admet un point d'inflexion.
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;\ 0{,}4)$. La plus petite valeur de a telle que $P(X \leq a) \geq 0{,}95$ est	$\boxed{12}$	15	11	13

Exercice 2 (14,5 points)

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :
-le joueur gagne la première partie
-s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,8
-s'il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,6
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement :
G_n : « le joueur gagne la n-ième partie ».
On note p_n la probabilité de G_n. On a donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = 0{,}2\, p_n + 0{,}6$.
► Pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = P(G_{n+1})$.
D'après la formule des probabilités totales : $P(G_{n+1}) = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G_n} \cap G_{n+1})$
Donc, d'après les règles sur les arbres de probabilités :

$$\begin{aligned} P(G_{n+1}) &= p_n \times 0{,}8 + (1 - p_n) \times 0{,}6 \\ &= 0{,}8p_n + 0{,}6 - 0{,}6p_n \\ &= 0{,}2\, p_n + 0{,}6 \end{aligned}$$

Finalement : $p_{n+1} = 0{,}2\, p_n + 0{,}6$.

3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul : $p_n > 0{,}75$.
► Soit la propriété $P(n)$: " $p_n > 0{,}75$".
Démontrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.
▪<u>Initialisation</u> : pour $n = 1$: $p_1 = 1$ donc $p_1 > 0{,}75$ donc $P(1)$ est vraie.
▪<u>Hérédité</u> : On suppose que, pour un certain entier $k \geq 1$, $P(k)$ est vraie, c-à-d $p_k > 0{,}75$.
Montrons qu'alors $P(k+1)$ est vraie, c-à-d $p_{k+1} > 0{,}75$.
On a $p_k > 0{,}75$ donc, successivement :
$0{,}2p_k > 0{,}75 \times 0{,}2$ (0,2 > 0 donc on conserve l'ordre)
$0{,}2p_k > 0{,}15$
$0{,}2p_k + 0{,}6 > 0{,}15 + 0{,}6$
$p_{k+1} > 0{,}75$ (car $p_{k+1} = 0{,}2\, p_k + 0{,}6$)
Donc $P(k+1)$ est vraie.
<u>Conclusion</u> : $P(1)$ est vraie et la propriété $P(n)$ est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.
Ainsi, pour tout entier naturel n non nul : $p_n > 0{,}75$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} - p_n < 0$.
► Pour tout entier naturel n non nul :
$p_{n+1} - p_n = 0{,}2\, p_n + 0{,}6 - p_n = (0{,}2 - 1)p_n + 0{,}6 = -0{,}8p_n + 0{,}6$.
Or, $p_n > 0{,}75$ donc, successivement :
$-0{,}8p_n < 0{,}75 \times (-0{,}8)$ (−0,8 < 0 donc on change l'ordre)
$-0{,}8p_n < -0{,}6$
$-0{,}8p_n + 0{,}6 < 0$.
Donc $p_{n+1} - p_n < 0$

c. Justifier que la suite (p_n) est convergente.
► Pour tout entier naturel *n* non nul : $p_{n+1} - p_n < 0$ donc $p_{n+1} < p_n$ donc $(\boldsymbol{p_n})$ **est décroissante**.
De plus, $p_n > 0{,}75$ donc $(\boldsymbol{p_n})$ **est minorée** par 0,75.
D'après le **théorème de la convergence monotone**, (p_n) est décroissante et minorée donc (p_n) est convergente.

4. Pour tout entier naturel *n* non nul, on pose $u_n = p_n - 0{,}75$.
a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
► $u_n = p_n - 0{,}75 \Leftrightarrow\ p_n = u_n + 0{,}75$.
Pour tout entier naturel *n* non nul :
$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}75$ donc, successivement :
$u_{n+1} = 0{,}2\,p_n + 0{,}6 - 0{,}75$
$u_{n+1} = 0{,}2\,p_n - 0{,}15$
$u_{n+1} = 0{,}2(u_n + 0{,}75) - 0{,}15.$
$u_{n+1} = 0{,}2u_n + 0{,}2 \times 0{,}75 - 0{,}15$
$\boldsymbol{u_{n+1} = 0{,}2u_n}$
Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}2$ et de premier terme
$\boldsymbol{u_1} = p_1 - 0{,}75 = 1 - 0{,}75 = \boldsymbol{0{,}25}$.

b. Exprimer u_n en fonction de *n*, puis en déduire que $p_n = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{n-1}$.
►$u_n = u_1\, q^{n-1} = 0{,}25 \times 0{,}2^{n-1}$
Donc : $\boldsymbol{p_n} = u_n + 0{,}75 = \boldsymbol{0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{n-1}}$.

c. Calculer la limite de la suite (p_n).
► $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}2^{n-1} = 0$ (car $-1 < 0{,}2 < 1$) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}25 \times 0{,}2^{n-1} = 0$ donc, par somme,
$\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{n-1} = 0{,}75$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{p_n} = \boldsymbol{0{,}75}$

5. On considère le script suivant, écrit en langage Python, définissant une fonction `seuil` :

```
def seuil(e):
    p=1
    n=1
    while p - 0.75 >= e:
        p = 0.2*p + 0.6
        n=n+1
    return n
```

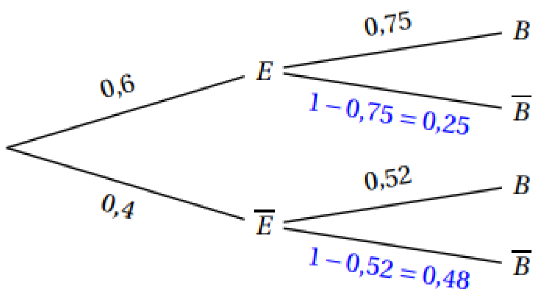
On veut trouver le plus petit entier naturel *n* tel que $p_n - 0{,}75 < 10^{-7}$.

Par quelle valeur doit-on remplacer le paramètre `e` pour que l'exécution de `seuil(e)` renvoie la valeur de *n* recherchée ? Donner alors cette valeur de *n*.

► `seuil(e)` renvoie le plus petit entier naturel *n* tel que $p_n - 0{,}75 < e$.
Il faut donc lancer l'exécution de `seuil(10**(-7))` pour obtenir la valeur de *n* recherchée.
On obtient *n* = 11.
Remarque : $p_n - 0{,}75 = 0{,}25 \times 0{,}2^{n-1}$ donc :
$p_n - 0{,}75 < 10^{-7} \Leftrightarrow 0{,}25 \times 0{,}2^{n-1} - 10^{-7} < 0$.
Avec la calculatrice, dans l'éditeur de fonctions, il suffit d'entrer $Y_1 = 0{,}25 * 0{,}2^{X-1} - 10^{-7}$
Puis de faire une table des valeurs en partant de X=1, par pas de 1. La première valeur de X pour laquelle $Y_1 < 0$ est X=11.

Exercice 3 (10,5 points)

On crée un arbre pondéré résumant la situation.



1. La probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile est :
   $P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$.
2. D'après la formule des probabilités totales :
   $P(B) = P(E \cap B) + P\left(\overline{E} \cap B\right) = 0,45 + 0,4 \times 0,52 = 0,658$.
3. Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile.

   La probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique est :
   $P_B(E) = \dfrac{P(E \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,45}{0,658} \approx 0,684$.
4. On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.

a. On est dans le cas d'une répétition avec remise d'une expérience n'ayant que 2 issues : la possibilité d'installer une borne de recharge, avec la probabilité $p = 0,658$, ou non. Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,658$.

b. $P(X = 8) = \dbinom{20}{8} \times 0,658^8 \times (1 - 0,658)^{20-8} \approx 0,011$

c. La probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge est : $P(X \geqslant 10) = 1 - P(X \leqslant 9) \approx 1 - 0,0452 \approx 0,955$

d. L'espérance de X est : $E(X) = np = 20 \times 0,658 = 13,16$.

e. La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1 200 €.

L'espérance de X représente le nombre moyen de clients pouvant installer une borne de recharge à leur domicile. L'installation d'une borne coûte 1 200 €.

Il faut donc prévoir : 13,16 × 1200 soit 15 792 €.

Exercice 4 (10 points)

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0{,}5$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$.

1. Soit la fonction *f* définie sur [0 ; +∞ [par :

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

On admet que *f* est dérivable sur [0 ; +∞ [et on note f' sa dérivée.

a. Montrer que, pour tout réel *x* de [0 ; +∞ [,

$$f'(x) = \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

►$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Donc : $u'(x) = 2$ et $v'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (formule $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$)

Sur [0 ; +∞ [: $f' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$

Le numérateur de $f'(x)$ est donc :

$$u'(x)v(x) - u(x)v'(x) = 2\sqrt{x^2+1} - 2x\,\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2(x^2+1) - 2x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$$

En divisant par $v^2(x)$, c-à-d en multipliant par son inverse $\frac{1}{v^2(x)}$, on obtient :

$$f'(x) = \left(u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\right) \times \frac{1}{v^2(x)} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{x^2+1} = \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

b. En déduire les variations de *f* sur [0 ; +∞ [.

►Pour tout réel *x* de [0 ; +∞ [, $x^2 + 1 > 0, \sqrt{x^2+1} > 0$ et 2 > 0 donc $f'(x) > 0$.

La fonction *f* est donc strictement croissante sur [0 ; +∞ [.

2. On remarquera que, pour tout entier naturel *n* , $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n* , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

►Soit la propriété $P(n)$: " $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ ".

Démontrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

▪<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$: $u_0 = 0{,}5$ et $u_1 = f(u_0) = f(0{,}5) = \frac{1}{\sqrt{1{,}25}} \approx 0{,}89$

Donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$ donc $P(0)$ est vraie.

▪<u>Hérédité</u> : On suppose que, pour un certain entier $k \geq 0$, $P(k)$ est vraie,

c-à-d $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 2$.

Montrons qu'alors $P(k+1)$ est vraie, c-à-d $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 2$.

On a $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 2$.

Comme la fonction *f* est croissante sur [0 ; +∞[, on peut l'appliquer à cette inégalité en conservant l'ordre :

$f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(2)$

Donc $0 \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq \frac{4}{\sqrt{5}}$ donc $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 2$ (car $\frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1{,}8$)

Donc $P(k+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : $P(0)$ est vraie et la propriété $P(n)$ est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel *n* : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

b. En déduire que (u_n) converge et donner un encadrement de sa limite ℓ.

►D'après l'inégalité précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle converge (théorème de la convergence monotone). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$ donc, en passant à la limite, $0 \leq \ell \leq 2$.

c. On admet que $f(\ell) = \ell$. Déterminer ℓ.

►On a $f(\ell) = \ell$.

Donc $\frac{2\ell}{\sqrt{\ell^2+1}} = \ell \quad (1)$

Montrons que $\ell \neq 0$:

(u_n) étant croissante, elle est minorée par son premier terme, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq u_0$ soit $u_n \geq 0{,}5$.

Donc, par passage à la limite, $\ell \geq 0{,}5$ donc $\ell \neq 0$.

On peut donc diviser par ℓ chaque membre de l'égalité (1) :

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{\ell^2+1}} = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{\ell^2+1} = 2$

$\Leftrightarrow \ell^2 + 1 = 4$

$\Leftrightarrow \ell^2 = 3$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\ell} = \sqrt{\mathbf{3}}$ (car $\ell > 0$)

La limite de la suite (u_n) est donc $\sqrt{3}$. On peut vérifier que $0 \leq \sqrt{3} \leq 2$.