

TSpé DEVOIR SURVEILLE N°8

/ 40

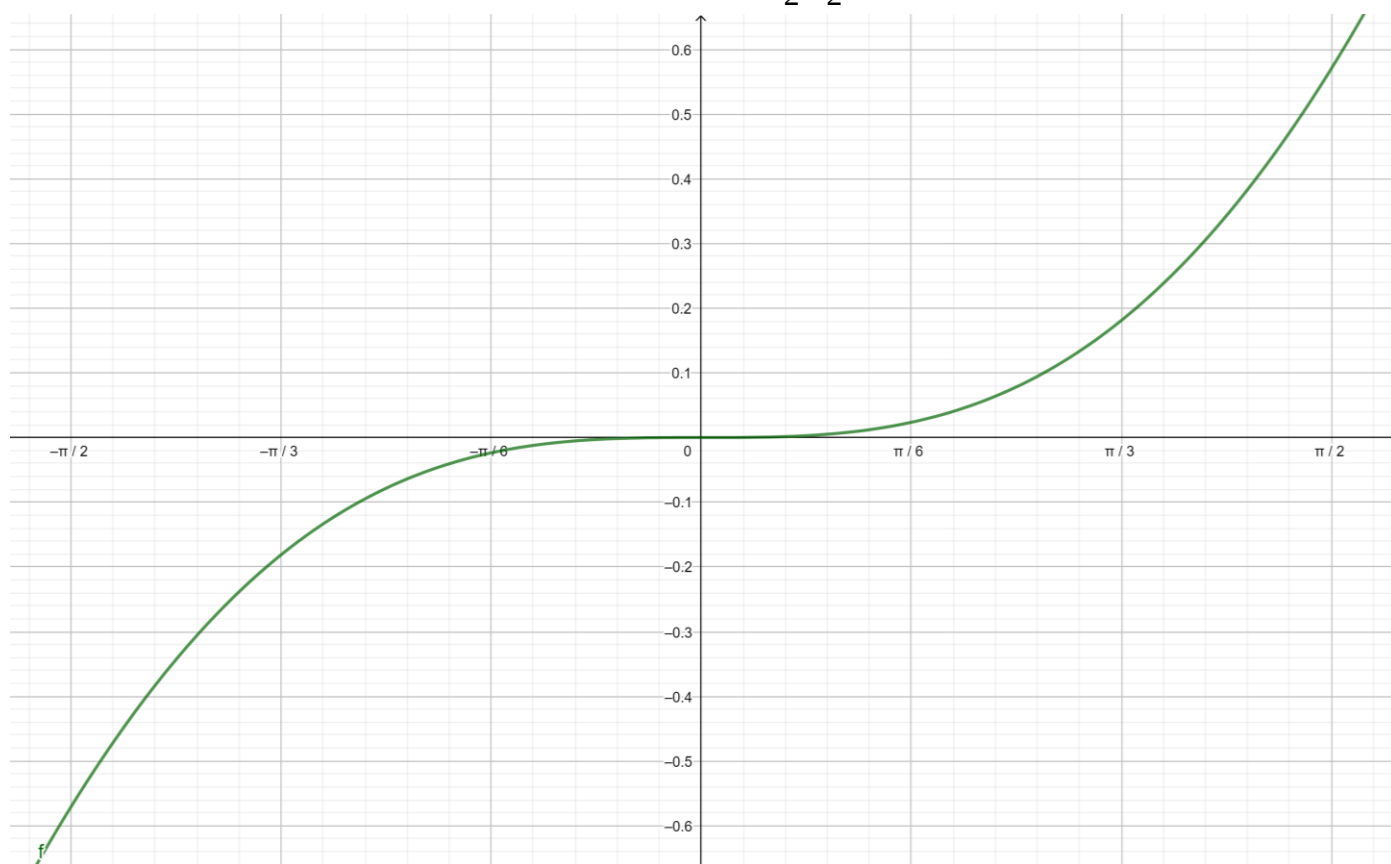
Exercice 1 :

1) Déterminer les valeurs exactes des intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int_{-1}^2 (7x^2 - 3x + 2) \, dx \quad \text{b) } \int_0^1 5(2x + 1)^3 \, dx \quad \text{c) } \int_0^1 \frac{3}{(5x+1)^2} \, dx$$

2) En utilisant l'intégration par parties, déterminer la valeur exacte de $\int_1^e (3x - 1) \ln x \, dx$ **Exercice 2 :**On donne la fonction f définie sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = x - \sin x$.1) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.2) En déduire que l'équation $\sin x = x$ admet une unique solution sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Donner la valeur de cette solution.

3) La courbe suivante représente la fonction f sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

a) Hachurer l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{6}$.

b) Déterminer cette aire.

Exercice 3 :

Soit (E) l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ $y' = -2y + 3$.

1) Résoudre (E) et déterminer sa solution v vérifiant $v(0) = 4$.

2) On pose $v = \frac{1}{u}$ avec u une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Montrer l'équivalence des deux affirmations suivantes :

(i) v est solution de (E) et $v(0) = 4$

(ii) u est solution de (E') : $y' = 2y - 3y^2$ et $u(0) = \frac{1}{4}$

3) En déduire la résolution de (E') et la fonction u .

Exercice 4 :

On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel n , $n \geq 1$, par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

1) Calculer I_1 .

2) Justifier que tous les termes de la suite (I_n) sont positifs.

3) a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que, pour tout entier n , $n \geq 1$, on a :

$$I_{n+1} = (n + 1) I_n - 1$$

b) En déduire I_2 .

4) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

5) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

Exercice 1 :

1) Déterminer les valeurs exactes des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{-1}^2 (7x^2 - 3x + 2) \, dx &= \left[7 \times \frac{x^3}{3} - 3 \times \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{56}{3} - 6 + 4 - \left(-\frac{7}{3} - \frac{3}{2} - 2 \right) \\ &= \frac{50}{3} + \frac{35}{6} \\ &= \frac{45}{2} = 22,5 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int_0^1 5(2x + 1)^3 \, dx = \int_0^1 \frac{5}{2} \times 2(2x + 1)^3 \, dx = \frac{5}{2} \times \left[\frac{(2x+1)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{2} \left(\frac{81}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{2} \times 20 = 50$$

$$\text{c) } \int_0^1 \frac{3}{(5x+1)^2} \, dx = \int_0^1 \frac{3}{5} \times \frac{5}{(5x+1)^2} \, dx = \frac{3}{5} \left[\frac{-1}{5x+1} \right]_0^1 = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{1}{6} + 1 \right) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

2) En utilisant l'intégration par parties, déterminer la valeur exacte de $\int_1^e (3x - 1) \ln x \, dx$

Posons $u'(x) = 3x - 1$ et $v(x) = \ln x$

$$u(x) = \frac{3}{2}x^2 - x \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e (3x - 1) \ln x \, dx &= \left[\left(\frac{3}{2}x^2 - x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \left(\frac{3}{2}x^2 - x \right) \, dx \\ &= \frac{3}{2}e^2 - e - 0 - \int_1^e \left(\frac{3}{2}x - 1 \right) \, dx \\ &= \frac{3}{2}e^2 - e - \left[\frac{3}{4}x^2 - x \right]_1^e \\ &= \frac{3}{2}e^2 - e - \left(\frac{3}{4}e^2 - e - \frac{3}{4} + 1 \right) \\ &= \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exercice 2 :

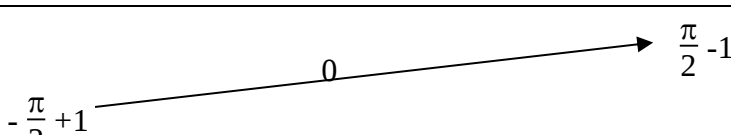
On donne la fonction f définie sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = x - \sin x$.

- 1) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

$$f'(x) = 1 - \cos(x)$$

Signe de $f'(x)$: $1 - \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1$ donc $x = 0$ dans $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

$$1 - \cos(x) > 0 \Leftrightarrow \cos(x) < 1 \text{ Toujours vrai}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
signes de $f'(x)$	+	0	+
variations de f			

- 2) En déduire que l'équation $\sin x = x$ admet une unique solution sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Donner la valeur de cette solution.

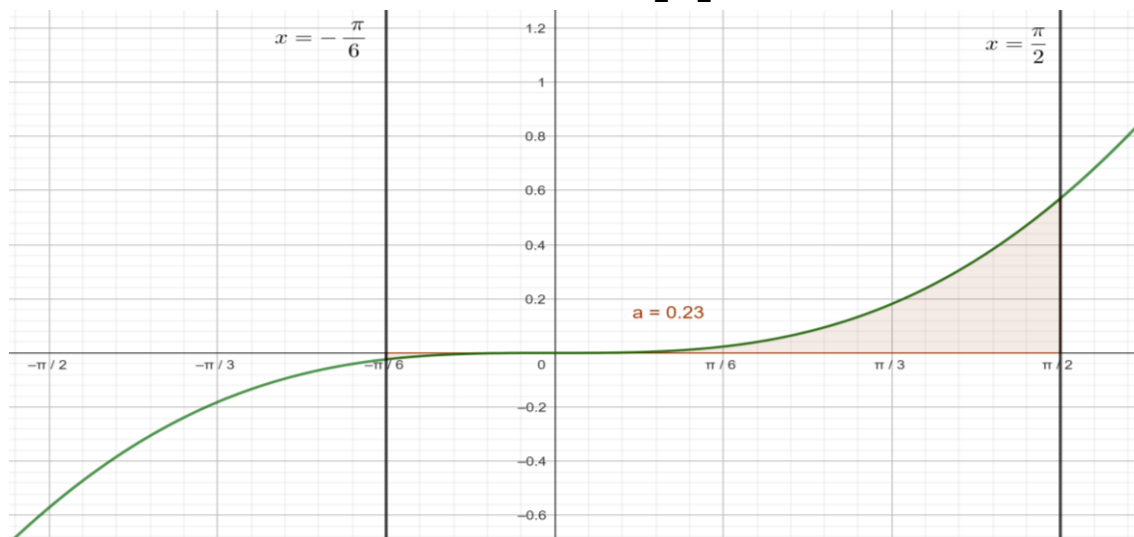
$\sin x = x \Leftrightarrow x - \sin x = 0$ donc résoudre $\sin x = x$ revient à résoudre $f(x) = 0$

La fonction f est définie et continue car dérivable et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

$$f(-\frac{\pi}{2}) \approx -0,6 ; f(\frac{\pi}{2}) \approx 0,6 \text{ et } 0 \in [f(-\frac{\pi}{2}); f(\frac{\pi}{2})]$$

donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire il existe une unique solution à l'équation $f(x) = 0$
Cette solution est 0 d'après le tableau de variations.

- 3) La courbe suivante représente la fonction f sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.



- a) Hachurer l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

b) Déterminer cette aire.

La fonction f est négative sur $[-\frac{\pi}{6}; 0]$ et positive sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

d'après le tableau de variations

donc l'aire hachurée vaut

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 f(x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{x^2}{2} + \cos x \right]_{-\frac{\pi}{6}}^0 \\&= \frac{\pi^2}{8} + 0 - 0 - 1 - \left(0 + 1 - \frac{\pi^2}{72} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\&= \frac{5\pi^2}{36} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\end{aligned}$$

Exercice 3 :

Soit (E) l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ $y' = -2y + 3$.

1) Résoudre (E) et déterminer sa solution v vérifiant $v(0) = 4$.

(E) est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -2$ et $b = 3$

Les solutions sont donc les fonctions v telles que $v(x) = Ce^{-2x} + \frac{3}{2}$ avec $C \in \mathbb{R}$

$$v(0) = 4 \text{ donc } C + \frac{3}{2} = 4 \Leftrightarrow C = \frac{5}{2} \text{ donc } v(x) = \frac{5}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}$$

2) On pose $v = \frac{1}{u}$ avec u une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Montrer l'équivalence des deux affirmations suivantes :

(i) v est solution de (E) et $v(0) = 4$

(ii) u est solution de (E') : $y' = 2y - 3y^2$ et $u(0) = \frac{1}{4}$

$$v = \frac{1}{u} \text{ donc } v' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$v \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow v' = -2v + 3 \Leftrightarrow -\frac{u'}{u^2} = -\frac{2}{u} + 3 \Leftrightarrow -u' = -2u + 3u^2$$

$$\Leftrightarrow u' = 2u - 3u^2$$

$$\Leftrightarrow u \text{ solution de (E')}$$

$$\text{De plus } v(0) = 4 \text{ donc } \frac{1}{u(0)} = 4 \Leftrightarrow u(0) = \frac{1}{4}$$

Les deux propositions sont donc équivalentes.

3) En déduire la résolution de (E') et la fonction u .

$$v = \frac{1}{u} \text{ donc } u = \frac{1}{v} \text{ donc } u(x) = \frac{1}{\frac{5}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}} = \frac{2}{5e^{-2x} + 3} \text{ On a } u(0) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Exercice 4 :

On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel n , $n \geq 1$, par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

1) Calculer I_1 .

$$I_1 = \int_0^1 x e^{1-x} dx$$

On va utiliser une intégration par partie

$$u'(x) = e^{1-x} \quad \text{et} \quad v(x) = x$$

$$u(x) = -e^{1-x} \quad \text{et} \quad v'(x) = 1$$

$$I_1 = [-x e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-x} dx = -e^0 - 0 - [e^{1-x}]_0^1 = -1 - 1 + e = e - 2$$

2) Justifier que tous les termes de la suite (I_n) sont positifs.

$$e^{1-x} > 0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ donc sur } [0; 1]; x^n \geq 0 \text{ sur } [0; 1] \text{ et } n \geq 1 \text{ donc } x^n e^{1-x} \geq 0 \text{ sur } [0; 1]$$

donc $I_n \geq 0$ pour tout entier naturel n , $n \geq 1$.

3) a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que, pour tout entier n , $n \geq 1$, on a :

$$I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$$

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx$$

$$u'(x) = e^{1-x} \quad \text{et} \quad v(x) = x^{n+1}$$

$$u(x) = -e^{1-x} \quad \text{et} \quad v'(x) = (n+1) x^n$$

$$I_{n+1} = [-x^{n+1} e^{1-x}]_0^1 - (n+1) \int_0^1 -x^n e^{1-x} dx = -e^0 - 0 + (n+1) I_n = -1 + (n+1) I_n$$

$$\text{donc } I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$$

b) En déduire I_2 .

$$I_2 = (1+1) I_1 - 1 = 2(e-2) - 1 = 2e - 5$$

4) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx - \int_0^1 x^n e^{1-x} dx = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n) e^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 x^n (x-1) e^{1-x} dx$$

$$\text{Signe de } I_{n+1} - I_n : \text{ D'après 2) } x^n e^{1-x} \geq 0 \text{ sur } [0; 1]$$

$$\text{De plus } 0 \leq x \leq 1 \text{ donc } x-1 \leq 0$$

$$\text{Donc } x^n (x-1) e^{1-x} \leq 0 \text{ donc } I_{n+1} - I_n \leq 0$$

Donc la suite (I_n) est décroissante.

5) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

La suite (I_n) est décroissante, minorée par 0 donc elle est convergente.