CHAPITRE 13 COMBINATOIRE ET DENOMBREMENT

I.Cardinal d'un ensemble :

1) Définition du cardinal d'un ensemble fini :

Soit A un ensemble fini.

Le cardinal de A, noté Card (A) est le nombre d'éléments de l'ensemble A.

Exemple : A = { 1 ; 2 ; 6 ; 9 ; 11 } donc Card(A) = ……….

2) Vocabulaire :

La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble de tous les éléments qui sont dans A ou dans B.
On la note $A \cup B$.
L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble de tous les éléments qui sont à la fois dans A et dans B. On la note $A \cap B$.
Deux ensembles sont dits disjoints si leur intersection est vide. A et B disjoints $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \varnothing$

Exemple : A={ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 } B={ 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 } C={ 20 ; 30 }

$A \cup B$ = ………………………………………………… $A \cap B$ =…………………
$A \cup C$ = ………………………………………………… $A \cap C$ = ………………
A et C sont disjoints.

3) Propriété admise :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des ensembles finis deux à deux disjoints.

Alors : $\mathbf{Card\,(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = Card(A_1) + Card(A_2) + \dots + Card(A_n) = \sum_{k=1}^{n} Card(A_k)}$

4) Produit cartésien de deux ensembles :

Soit A et B deux ensembles non vides.

Le produit cartésien de A et de B, noté $A \times B$ (se lit « A croix B »), est l'ensemble constitué des couples $(x\,;y)$ où x est un élément de A et y un élément de B.

$$A \times B = \{(x; y), x \in A, y \in B\}$$

Exemple :

A= {1 ; 2} et B= {3 ; 4} on a : $A \times B = \{\dots$ ……………………………………………………..

ATTENTION ! Dans un couple, l'ordre est important !

(1 ; 2) n'est pas le même élément que (2 ; 1).

Propriété :

Soit A et B deux ensembles finis. Alors : $\text{Card}\,(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$

Démonstration :(ex 68 p 47)

Définition :

Soit A un ensemble et n un entier naturel non nul.

On appelle n-uplet de A un élément de $A^n = A \times A \times \ldots \times A$, ($A$ est n fois)

Propriété :

Soit A un ensemble fini et n un entier naturel non nul. Alors $\text{Card}\,(A^n) = (\text{Card}(A))^n$

Démonstration : Démonstration par récurrence ex 69 p 47.

Application :

Un immeuble est protégé par un digicode. Ce code est formé de 4,5 ou 6 chiffres de 0 à 9 et d'une lettre parmi les 3 lettres A, B ou C. Combien de codes peut-on former avec ce système ?

Réponse :

II. Arrangements et permutations :

1) Définition d'une factorielle :

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle factorielle de n le nombre : $n\,! = \; n \times (n-1) \times \ldots . . \times 2 \times 1$

Par convention, 0 !=1

Exemple : 5 ! = ……………………………………………………….

2) Définition d'un arrangement :

Soit A un ensemble fini non vide à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n.

Un arrangement de k éléments de A (ou k-arrangement de A)

est un k-uplet d'éléments distincts de A.

Exemple :

Si A ={1 ;2 ;3 ;4} alors (1 ;3 ;4) et (1 ;4 ;3) sont deux……………………………………………..

et (1 ; 4 ; 4) ………………………………………………………………………………………………

3) Propriété :

Soit A un ensemble fini non vide à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n.

Le nombre de k-arrangements de A est égal à : $\boldsymbol{A_n^k = n \times (n-1) \ldots . . \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$

Démonstration :

4) Définition d'une permutation :

Soit A un ensemble fini non vide à n éléments.

Une permutation de A est un n-uplet d'éléments distincts de A.

Une permutation de A est en fait un n–arrangement de A.

Le nombre de permutations d'un ensemble fini non vide à n éléments est n !

$$\boldsymbol{A_n^n = n \times (n-1) \ldots . . \times (n-n+1) = \; n\,!}$$

Exemple :

Si A= {1 ; 2 ; 3} les permutations de A sont:

……

Application :

Dans une classe 5 élèves doivent passer un oral. De combien de façons différentes peut-on organiser ces oraux , chaque élève étant interrogé une seule fois ?

Combien y-a-t-il de possibilités si le professeur n'a le temps d'interroger que 3 d'entre eux ?

Solution

III. Combinaisons d'un ensemble fini :

1) Définition:

Une partie d'un ensemble A est un sous ensemble de A.

Tous les éléments d'une partie de A sont des éléments distincts de A.

Exemple

Si A=$\{1; 2; 3\}$alors $\{1; 3\}; \{3\}; \{2; 3\}$ et $\emptyset$ sont des parties de A.

2) Propriété:

Soit A un ensemble fini à n éléments. Le nombre de parties de A est égal à 2^n.

Démonstration :

3) Définition d'une combinaison:

Soit A un ensemble fini à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n.

Une combinaison de k éléments de A est une partie de A de cardinal k.

Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$. Il se lit " k parmi n".

C'est un coefficient binomial.

4) Propriétés des coefficients binomiaux:

Soit n et k deux entiers naturels tel que $k \leq n$. Alors :

1) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ et $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2) Relation de Pascal : Si $1 \leq k \leq n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
3) De plus $\binom{n}{0}$ = 1. Si $n \geq 1, \binom{n}{1} = n$ et $si\ n \geq 2$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

1)Démonstration du 1) partie 1

Démonstration du 1) partie 2 exercice 94 page 50

Démonstration de la relation de Pascal :

Démonstration des relations du 3) :

5) Application : Le triangle de Pascal

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

Remarque : Formule du binôme de Newton

Pour tous réels a et b, et pour tout entier naturel $n \geq 1, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Propriété :

Soit n un entier naturel. Alors $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Démonstration :

Application :

Dans une grille comportant des nombres de 0 à 9 et les lettres de A à F, il faut choisir 3 nombres et 2 lettres.

Combien de grilles différentes existe-t-il ?

Solution :