

Les corrigés sont sur le site de l'APMEP (<https://www.apmep.fr/Annee-2024>)

Bonnes révisions !

Amérique du Nord Sujet 1 21 mai 2024 :

Fonctions trigonométriques et exponentielles, suites d'intégrales

EXERCICE 4

6 points

Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^\pi e^{-nx} \sin(x) dx, \quad J_n = \int_0^\pi e^{-nx} \cos(x) dx.$$

1. Calculer I_0 .
2.
 - a. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geq 0$.
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leq 0$.
 - c. Dédire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.
3.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leq \int_0^\pi e^{-nx} dx.$$

- b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^\pi e^{-nx} dx = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}.$$

- c. Dédire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n) .
4.
 - a. En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.
Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1 from math import *
2 def seuil() :
3     n = 0
4     I = 2
5     ...
6     n = n+1
7     I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8     return n
```

EXERCICE 3

5 points

On considère l'équation différentielle

$$(E_0): y' = y$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x .

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0) .

On considère l'équation différentielle

$$(E): y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x .

3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.
On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E) .
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) .
6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.
7. Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-2e^x + \sin(x) + 2\cos(x)] dx.$$

Exercice 3

7 points

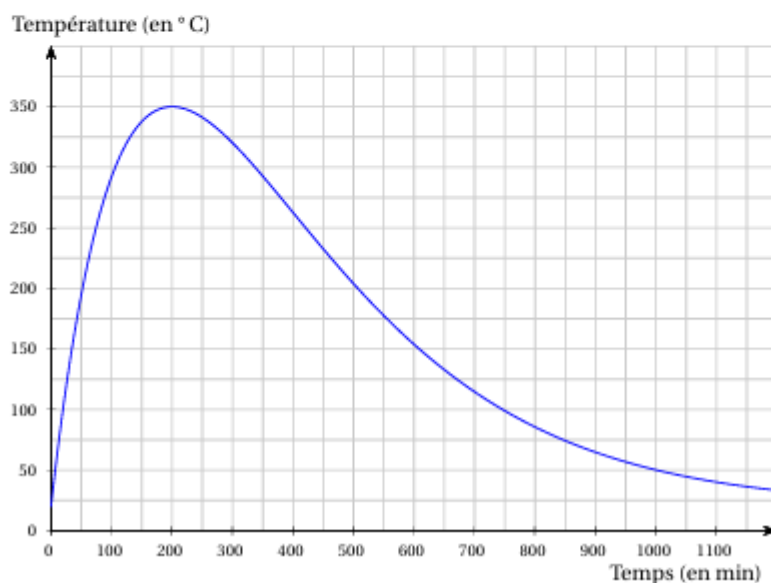
Un organisme certificateur est missionné pour évaluer deux appareils de chauffage, l'un d'une marque A et l'autre d'une marque B.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : appareil de la marque A

À l'aide d'une sonde, on a mesuré la température à l'intérieur du foyer d'un appareil de la marque A.

On a représenté, ci-dessous, la courbe de la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer en fonction du temps écoulé, exprimé en minutes, depuis l'allumage du foyer.



Par lecture graphique :

1. Donner le temps au bout duquel la température maximale est atteinte à l'intérieur du foyer.
2. Donner une valeur approchée, en minutes, de la durée pendant laquelle la température à l'intérieur du foyer dépasse 300 °C.
3. On note f la fonction représentée sur le graphique.

Estimer la valeur de $\frac{1}{600} \int_0^{600} f(t) dt$. Interpréter le résultat.

Partie 2 : étude d'une fonction

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(t) = 10te^{-0,01t} + 20.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2.
 - a. Montrer que pour tout $t \in [0 ; +\infty[$, $g'(t) = (-0,1t + 10)e^{-0,01t}$.
 - b. Étudier les variations de la fonction g sur $[0 ; +\infty[$ et construire son tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $g(t) = 300$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[0 ; +\infty[$. En donner des valeurs approchées à l'unité.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^{600} g(t) dt$.

EXERCICE 3

6 points

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1),$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Montrer que pour tout nombre réel x , on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie C : calcul intégral

1. Étudier le signe de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.

2. Interpréter graphiquement l'intégrale :

$$I = \int_2^4 f(x) \, dx.$$

3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2 ; 4]$, on a l'encadrement :

$$0,5x - 1 \leq f(x) \leq 0,25x + 0,25.$$

En déduire l'encadrement :

$$1 \leq I \leq 2.$$

1. La solution f de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ telle que $f(0) = 1$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

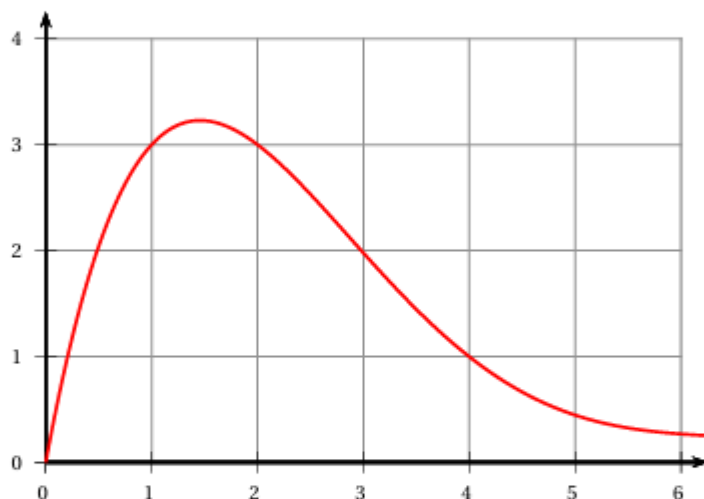
A. $f(x) = e^{-3x}$

B. $f(x) = -\frac{4}{3}e^{-3x} + \frac{7}{3}$

C. $f(x) = e^{-3x} + \frac{7}{3}$

D. $f(x) = -\frac{10}{3}e^{-3x} - \frac{7}{3}$

2. La courbe d'une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ est donnée ci-dessous.



Un encadrement de l'intégrale $I = \int_1^5 f(x) dx$ est :

A. $0 \leq I \leq 4$

B. $1 \leq I \leq 5$

C. $5 \leq I \leq 10$

D. $10 \leq I \leq 15$

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 \ln(x^2 + 4)$.

Alors $\int_0^2 g'(x) dx$ vaut, à 10^{-1} près :

A. 4,9

B. 8,3

C. 1,7

D. 7,5

Exercice 2

6 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x + x.$$

Affirmation A : La fonction f admet pour tableau de variations le tableau ci- dessous :

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f	$-\infty$	$+\infty$

Affirmation B : L'équation $f(x) = -2$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

2. **Affirmation C :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = -\frac{1}{3}.$$

3. On considère la fonction k définie et continue sur $\mathbb{R}$ par

$$k(x) = 1 + 2e^{-x^2+1}.$$

Affirmation D : Il existe une primitive de la fonction k décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad 3y' + y = 1.$$

Affirmation E : La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 4e^{-\frac{1}{3}x} + 1$$

est solution de l'équation différentielle (E) avec $g(0) = 5$.

5. **Affirmation F :** Une intégration par parties permet d'obtenir :

$$\int_0^1 x e^{-x} \, dx = 1 - 2e^{-1}.$$

Exercice 2

5 points

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montagne locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm (**Figure 2**).

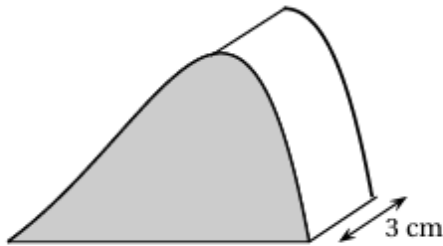


Figure 1

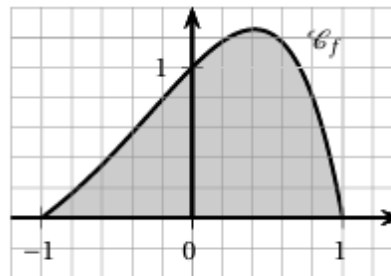


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par :

$$f(x) = (1 - x^2) e^x.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1.
 - a. Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1 ; 1]$ on a $f(x) \geqslant 0$.
 - b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_{-1}^1 x e^x dx.$$

2. Le volume $\mathcal{V}$ de chocolat, en cm^3 , nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathcal{V} = 3 \times S$$

où S est l'aire, en cm^2 , de la surface colorée (**Figure 2**).

En déduire que ce volume $\mathcal{V}$, arrondi à $0,1 \text{ cm}^3$ près, est égal à $4,4 \text{ cm}^3$.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0,01 ; +\infty[$ par :

$$B(q) = 8q^2[2 - 3 \ln(q)] - 3.$$

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0,01 ; +\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1.
 - a. Déterminer $\lim_{q \rightarrow +\infty} B(q)$.
 - b. Montrer que, pour tout $q \geq 0,01$, $B'(q) = 8q(1 - 6 \ln(q))$.
 - c. Étudier le signe de $B'(q)$, et en déduire le sens de variation de B sur $[0,01 ; +\infty[$.
Dresser le tableau de variation complet de la fonction B .
 - d. Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan?
2.
 - a. Montrer que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1,2 ; +\infty[$.
Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.
 - b. On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0,01 ; 1,2[$.
On donne $\alpha \approx 0,757$.
En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.

Exercice 3

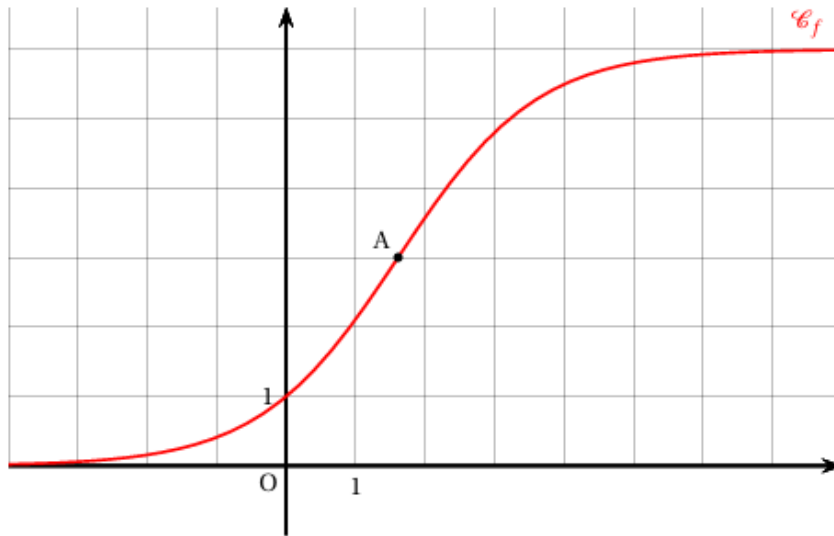
5 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{6}{1 + 5e^{-x}}$$

On a représenté sur le schéma ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f .



1. Montrer que le point A de coordonnées $(\ln 5 ; 3)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.
3. a. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = \frac{30e^{-x}}{(1 + 5e^{-x})^2}.$$

- b. En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

4. On admet que :

- f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f'' sa dérivée seconde;
- pour tout réel x ,

$$f''(x) = \frac{30e^{-x}(5e^{-x} - 1)}{(1 + 5e^{-x})^3}.$$

- a. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. On montrera en particulier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion.
 - b. Justifier que pour tout réel x appartenant à $] -\infty ; \ln 5]$, on a : $f(x) \geq \frac{5}{6}x + 1$.
5. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = k \ln(e^x + 5)$, où k est une constante réelle.
 - a. Déterminer la valeur du réel k de sorte que F_k soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
 - b. En déduire que l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 5$ est égale à $6 \ln \left(\frac{5}{3} \right)$.

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad y' = y - \frac{1}{6}y^2.$$

On rappelle qu'une solution de l'équation (E) est une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, on a :

$$u'(x) = u(x) - \frac{1}{6}[u(x)]^2.$$

1. Montrer que la fonction f définie dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$.
3. On désigne par g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas.

On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{g(x)}$.

On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}$, On note g' et h' les fonctions dérivées de g et h .

- a. Montrer que si h est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$, alors g est solution de l'équation différentielle $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

- b. Pour tout réel positif m , on considère les fonctions g_m définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = \frac{6}{1 + 6me^{-x}}.$$

Montrer que pour tout réel positif m , la fonction g_m est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

Exercice 3

5 points

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - 4) e^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier que pour tout réel x , $f'(x) = (-x^2 + 2x + 4) e^{-x}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$.

1. Justifier que $I_0 = e^2 - 1$.
2. En utilisant une intégration par partie, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1) I_n.$$

3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2 .

Partie 3

1. Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie 1.
2. On a représenté ci-contre la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le domaine D du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S du domaine D .

