

1STMG Travaux de groupes Fiche 11 Probabilités et variables aléatoires

Exercice 1:

Au goûter du centre de vacances, Céline prend un gâteau fourré puis une brique de jus de fruits. Dans un premier sac, il y a 12 gâteaux à l'orange et 36 gâteaux à la fraise. Dans un second sac, il y a 24 briques de jus de pomme et 24 briques de jus de raisin.

- Construire un arbre de probabilités illustrant cette situation pour donner l'ensemble E des issues. On notera :
 - O le choix d'un gâteau à l'orange,
 - F le choix d'un gâteau à la fraise,
 - P le choix d'une brique de jus de pomme
 - R le choix d'une brique de jus de raisin.
- Calculer la probabilité de l'événement : « Céline a pris un gâteau à l'orange et un jus de pomme ».

Exercice 2:

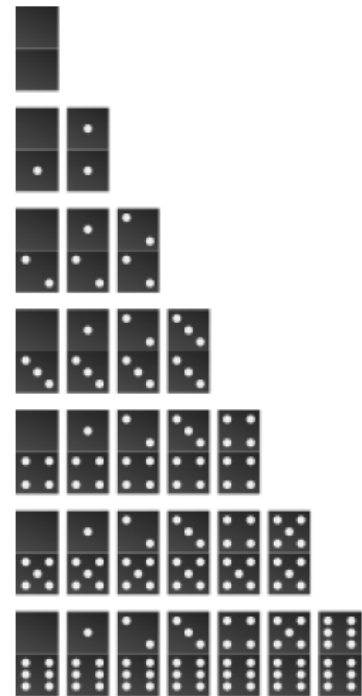
Un domino est composé de deux cases portant chacune un nombre de points compris entre 0 et 6. Un même nombre peut figurer dans les deux cases. Un jeu de dominos en comporte 28.

On pioche un domino au hasard et on considère la variable aléatoire X égale à la différence entre la plus grande valeur et plus petite valeur du domino.

- Préciser les valeurs prises par X .
- Décrire l'événement $\{X=3\}$ et en déduire $P(X=3)$.
- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

On remplira un tableau de ce type :

Valeurs de X	0	1		TOTAL
Probabilités	$P(X=0) = \dots$	$P(X=1) = \dots$		



Exercice 3:

Une association propose chaque jour un spectacle au prix de 20 €. Pour le promouvoir l'association annonce qu'à l'entrée du spectacle, chaque client lancera un dé cubique non truqué, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

- Si le résultat est 6, l'entrée est gratuite.
- Si le résultat est 1, l'entrée est à demi-tarif.
- Si le résultat est 5, le client a une remise de 20 %.
- Dans les autres cas, le client paie plein tarif.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque résultat du lancer de dé, associe le prix que paiera le client.

- Montrer que la variable aléatoire X prend les valeurs 0, 10, 16 et 20.
- Déterminer la loi de probabilité de X (les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles).

On remplira un tableau de ce type :

Valeurs de X	0	10	16	20	TOTAL
Probabilités	$P(X=0) = \dots$	$P(X=1) = \dots$	$P(X=16) = \dots$	$P(X=20) = \dots$	

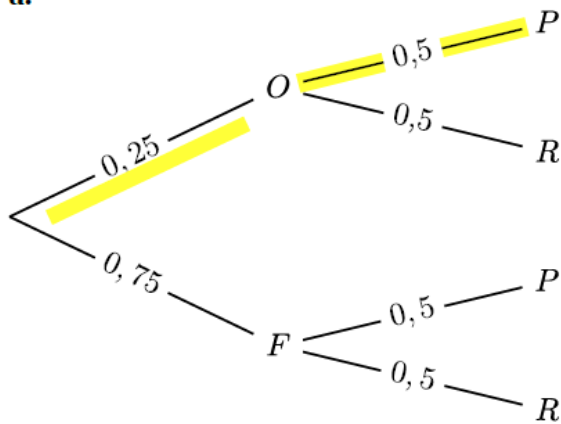
- Calculer la probabilité de l'événement $X < 10$

BONUS :

- Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.
- Que peut-on en déduire pour l'association si la salle composée de 900 places est pleine ?

Exercice 1:

a.



Quelques explications :

Le choix du gâteau de du jus sont indépendants, on aurait pu faire l'arbre dans l'autre sens.

Il y a 12 gâteaux à l'orange sur $12+36=48$ gâteaux donc :

$$P(O) = \frac{12}{48} = \frac{1}{4} = 0,25$$

De même $P(F) = \frac{36}{48} = \frac{3}{4} = 0,75$

Il y a autant de jus de pomme que de jus de raisins donc

$$P(R) = P(F) = \frac{1}{2} = 0,5$$

b. On cherche la probabilité de la branche surlignée en jaune :

$$P(O \cap P) = P(O) \times P(P) = 0,25 \times 0,5 = 0,125$$

Exercice 2:

Tous les dominos sont différents

a. La plus petite différence est 0 (si les deux cotés du dominos ont la même valeur)

La plus grande différence est 6 (si les deux cases sont 0 et 6)

L'ensemble des valeurs présent par X est donc $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

b. $\{X=3\}$ est l'événement la différence entre la plus grande valeur et plus petite valeur du domino est égale à 3.

Il y a 4 dominos qui permettent d'avoir 3

3 | 0 4 | 1 5 | 2 6 | 3

On peut le noter $\{X=3\} = \{3|0 ; 4|1 ; 5|2 ; 6|3\}$

donc $P(X = 3) = \frac{4}{28}$

c. On procède de même pour les autres valeurs présent par X :

- $\{X=0\} = \{0|0 ; 1|1 ; 2|2 ; 3|3 ; 4|4 ; 5|5 ; 6|6\}$ donc $P(X = 0) = \frac{7}{28}$
- $\{X=1\} = \{1|0 ; 2|1 ; 3|2 ; 4|3 ; 5|4 ; 6|5\}$ donc $P(X = 1) = \frac{6}{28}$
- $\{X=2\} = \{2|0 ; 3|1 ; 4|2 ; 5|3 ; 6|4\}$ donc $P(X = 2) = \frac{5}{28}$
- $\{X=4\} = \{4|0 ; 5|1 ; 6|2\}$ donc $P(X = 4) = \frac{3}{28}$
- $\{X=5\} = \{5|0 ; 6|1\}$ donc $P(X = 5) = \frac{2}{28}$
- $\{X=6\} = \{6|0\}$ donc $P(X = 6) = \frac{1}{28}$

On peut le résumer dans un tableau :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$

Exercice 3:

1. D'après l'énoncé :

- Si le résultat est 6, l'entrée est gratuite, X prend alors la valeur 0.
- Si le résultat est 1, l'entrée est à demi-tarif, X prend alors la valeur $20 \div 2 = 10$.
- Si le résultat est 5, le client a une remise de 20 %, X prend alors la valeur $20 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 20 \times 0,8 = 16$.
- Dans les autres cas, le client paie plein tarif. X prend alors la valeur 20.

2. Le dé n'est pas pipé donc chaque face a une chance sur 6 de sortir. On en déduit la loi de probabilité suivante :

x_i	0	10	16	20
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$

3. $P(X < 10) = P(X = 0) = \frac{1}{6}$

4. $E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{6} + 16 \times \frac{1}{6} + 20 \times \frac{3}{6} = \frac{83}{6} \approx 14,33$

Le prix moyen des entrées payées par les visiteurs sera de 14,33 €

5. La recette espérée sera de $900 \times 14,33 = 12900$